Zbiory i funkcje wypukłe.

Wprawdzie (na razie) interesować nas będą przede wszystkim funkcje wypukłe jednej zmiennej, ale ich definicja w większej liczbie wymiarów nie wymaga dodatkowego wysiłku, a łatwiej zobaczyć jej sens geometryczny - dlatego też kilka najbliższych definicji podamy nie w $\mathbb{R}$, ale w $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

<u>Def:</u> Odcinkiem domkniętym o końcach w x i $y \in \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}\}$

(dla $\alpha = 1$ dostajemy $z = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$
$\alpha = 0$ $z = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$ końce odcinka
$\alpha = \frac{1}{2}$ $z = \frac{x+y}{2}$ środek odcinka)

<u>Uwaga:</u> Jeżeli zdefiniujemy wektor $v = y - x$, to
$[x,y] = \{x + \theta v : \theta \in [0,1]\}$.

$$x + \theta v = x + \theta(y-x) = (1-\theta)x + \theta y;$$

kładąc $\alpha = 1 - \theta$ dostajemy poprzednią definicję.

Oczywiście w ten sam sposób możemy zdefiniować odcinki otwarte, otwarto-domknięte itp, np
$[x,y) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha \in (0,1]\}$.

<u>Def:</u> Mówimy, że **zbiór** $A \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>wypukły</u>, jeżeli
$\forall_{x,y \in A}\ [x,y] \subset A$,
czyli $\forall_{\alpha \in [0,1]} \forall_{x,y \in A}\ \alpha x + (1-\alpha)y \in A$.

Przykłady zbiorów wypukłych:

- odcinek, $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$, prosta, koło domknięte, koło otwarte (w $\mathbb{R}^2$), kula domknięta/otwarta, ale też koło z niektórymi punktami brzegu
- kwadrat otwarty i domknięty są wypukłe, ale kwadrat otwarty + wierzchołki już nie. (a kwadrat otwarty + 1 wierzchołek tak).
- wypukłe podzbiory $\mathbb{R}$ to: $\emptyset$, zbiory jednopunktowe, odcinki (otwarte, domknięte, otw.-domkn., domkn.-otw.), półproste otwarte i domknięte, cała prosta.

Twierdzenie: Część wspólna (dowolnie licznej) rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Dowód – abstract nonsense, ćwiczenie (podpowiedź: w zasadzie tak samo, jak to, że część wspólna rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym).

Def: Niech A będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ jest wypukła, jeżeli

$$\forall_{x,y\in A} \ \forall_{\alpha\in[0,1]} \quad f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (*)$$

Gdy w $(*)$ ① $\alpha \in \{0,1\}$ lub ② $x=y$

to oczywiście **obie** strony nierówności są w rzeczywistości równe. Jeżeli to jedyna sytuacja, w której w $(*)$ zachodzi równość, to f nazywamy ściśle wypukłą.

Jeżeli $-f$ jest wypukła, to f nazywamy funkcją <u>wklęsłą</u> (uwaga: nie ma zbiorów wklęsłych!), analogicznie jeżeli $-f$ jest ściśle wypukła, to f jest <u>ściśle wklęsła</u>. Dla funkcji wklęsłych nierówność $(*)$ zachodzi w przeciwną stronę.

Przykłady funkcji wypukłych i wklęsłych

1. Każda funkcja liniowa (a dokł. afiniczna) na $\mathbb{R}$ jest równocześnie wypukła i wklęsła, bo (dla $f(x)=ax+b$)
$$\forall_{x,y,\alpha\in\mathbb{R}} \quad f(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

Proszę sprawdzić, że jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest na (a,b) równocześnie wypukła i wklęsła, to $\exists_{\tau,\sigma\in\mathbb{R}}$ t. że $\forall_{x\in(a,b)} \; f(x)=\tau x+\sigma$.

2. $f(x)=x^2$ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$:
$$(\alpha x+(1-\alpha)y)^2 \overset{?}{\leq} \alpha x^2+(1-\alpha)y^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha x^2+(1-\alpha)y^2 - \alpha^2x^2-(1-\alpha)^2y^2-2\alpha(1-\alpha)xy \overset{?}{\geq} 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha(1-\alpha)(x^2+y^2-2xy) \overset{?}{\geq} 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha(1-\alpha)(x-y)^2 \geq 0$$
$\leftarrow$ ta nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$ i $\alpha\in[0,1]$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha=0 \vee \alpha=1 \vee x=y$.

3. $f(x)=\sqrt{x}$ jest ściśle wklęsła na $[0,\infty)$:
Z poprzedniego przykładu wiemy, że $\forall_{\alpha\in[0,1]} \forall_{t,s\in\mathbb{R}}$
$$(\alpha t+(1-\alpha)s)^2 \leq \alpha t^2+(1-\alpha)s^2$$
i równość $\Leftrightarrow \alpha\in\{0,1\} \vee t=s$.

Podstawiając $t=\sqrt{x}$, $s=\sqrt{y}$ mamy, dla $x,y\in[0,\infty)$

$$\left(\alpha\sqrt{x}+(1-\alpha)\sqrt{y}\right)^2\le\alpha x+(1-\alpha)y$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha\sqrt{x}+(1-\alpha)\sqrt{y}\le\sqrt{\alpha x+(1-\alpha)y}$$

i równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha\in\{0,1\}$ lub $\underset{t=s}{\sqrt{x}=\sqrt{y}}\Leftrightarrow x=y$.

Twierdzenie: Funkcja ciągła określona na zbiorze wypukłym A jest na A wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x,y\in A}\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\overset{\odot}{\le}\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Podobnie, f jest na A ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}}\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\underset{\otimes}{<}\frac{f(x)+f(y)}{2}$

Dowód: W obu przypadkach potrzebny jest jedynie dowód, że jeżeli zachodzi nierówność $\odot$ lub $\otimes$, to funkcja f jest odpowiednio wypukła lub ściśle wypukła, w drugą stronę wystarczy w def. funkcji wypukłej (i ściśle wypukłej) przyjąć $\alpha=\frac{1}{2}$.

Niech więc f spełnia, $\forall_{x,y\in A}$, nierówność $\odot$.
Wykażemy indukcyjnie, że f spełnia nierówność $(*)$ dla każdego $x,y\in A$ i dla każdego $\alpha\in\underbrace{\left\{\frac{k}{2^n}: n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, k\in\{0,1,\dots,2^n\}\right\}}_{=B}$

Oznaczmy $B_n=\left\{\frac{k}{2^n}: k\in\{0,1,2,\dots,2^n\}\right\}$.
Mamy $B_0=\{0,1\}$, $B_1=\{0,\frac{1}{2},1\}$, $B_2=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$ itd.
To, że $(*)$: $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$ zachodzi $\forall_{x,y\in A}$ i $\forall_{\alpha\in B_0}$ jest tautologią,

a $\forall_{x,y\in A}$ $\forall_{\alpha\in B_1}$ po prostu założeniem twierdzenia:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}f(x)+} f\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\right) \leq \tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2}f(y)$$

(bo dla $\alpha=0,1$ już mamy i jest to tautologia z B_0).

Załóżmy, że $(*)$ zachodzi $\forall_{x,y\in A}$ i $\forall_{\alpha\in B_n}$; chcemy wykazać, że zachodzi również $\forall_{x,y\in A}$ i $\forall_{\alpha\in B_{n+1}}$.

Niech $\alpha\in B_{n+1}$, a więc $\alpha=\frac{k}{2^{n+1}}$ dla pewnego $k\in\{0,1,\dots,2^{n+1}\}$.
Dla $k=0$ i $k=2^{n+1}$ nierówność jest oczywista, załóżmy więc, że $k\in\{1,2,\dots,2^{n+1}-1\}$.
$1-\alpha=1-\frac{k}{2^{n+1}}=\frac{l}{2^{n+1}}$ dla $l=2^{n+1}-k$. Spośród dwóch liczb k,l jedna jest na pewno $\leq 2^n$; ze względu na symetrię oznaczeń x,y (a więc zamienność α i $(1-\alpha)$) możemy bez straty ogólności przyjąć, że $k\leq 2^n$.

$$f\Big(\underbrace{\tfrac{k}{2^{n+1}}}_{\alpha}x+\underbrace{\tfrac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}}_{1-\alpha}y\Big)=f\Big(\tfrac{1}{2}\Big(\underbrace{\tfrac{k}{2^n}}_{\beta}x+\tfrac{2^n-k}{2^n}y\Big)+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2^{n+1}-2^n}{2^n}y\Big)=$$

$$=f\Big(\tfrac{1}{2}\big(\beta x+(1-\beta)y\big)+\tfrac{1}{2}y\Big)\overset{\text{z zał.}}{\leq}\tfrac{1}{2}f\big(\beta x+(1-\beta)y\big)+\tfrac{1}{2}f(y)$$

$$\underset{\substack{\text{bo } \beta\in B_n\\ +\text{zał. ind.}}}{\leq}\tfrac{1}{2}\beta f(x)+\tfrac{1}{2}(1-\beta)f(y)+\tfrac{1}{2}f(y)$$

$$=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\Big(\tfrac{1}{2}\Big(1-\frac{k}{2^n}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big)f(y)=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)\cancel{+\Big(1-\frac{k}{2^{n+1}}\Big)f(y)}$$

$$+\Big(1-\frac{k}{2^{n+1}}\Big)f(y).$$

~~Pozostaje~~ Na mocy zasady indukcji $(*)$ zachodzi $\forall_{x,y\in A}$ $\forall_{\alpha\in B}$.
Zauważmy teraz, że dowolną $\alpha\in[0,1]$ można ~~przyb~~ przedstawić jako granicę ciągu elementów B (kolejne rozwinięcia dwójkowe α). Oznaczmy taki ciąg przez (α_m): $\forall_m\ \alpha_m\in B$, $\alpha_m\xrightarrow{m\to\infty}\alpha$; wtedy

$$\cancel{\forall} \ \forall_{x,y} \ \forall_{m} \ f(\alpha_m x + (1-\alpha_m)y) \le \alpha_m f(x) + (1-\alpha_m) f(y) \ ;$$

przechodząc z m do ∞ dostajemy

$$\forall_{x,y\in A} \ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) .$$

A jak ze ściśłą wypukłością? Nie wystarczy prześledzić dowód i sprawdzić, kiedy zachodzi równość, bo przechodziliśmy do granicy (co zamienia ostre nierówności na nieostre). Załóżmy jednak, że $\forall_{x,y\in A}$ zachodzi ⊗, ~~ale f nie jest ściśle wypukła,~~ ~~a z więc~~ ⊗ pociąga za sobą ⊙, wiemy więc, że f jest wypukła. ~~Skoro więc nie jest ściśle wypukła,~~ ~~to~~ $\cancel{\exists_{x,y\in A,\ x\neq y,\ \alpha\in(0,1)} \ f(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)}$.

~~Mamy wówczas~~ Niech $x\neq y$, $\alpha\in(0,1)$. Wówczas

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) = f\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\left(\frac{1+\alpha}{2}x + \frac{1-\alpha}{2}y\right) + \left(1-\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)y\right) \le$$

$$\le \frac{2\alpha}{\alpha+1} f\left(\frac{1+\alpha}{2}x + \frac{1-\alpha}{2}y\right) + \left(1-\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right) f(y) =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha+1} f\left(\frac{\alpha x+(1-\alpha)y}{2} + \frac{x}{2}\right) + \frac{1-\alpha}{\alpha+1} f(y) <$$

$$< \frac{2\alpha}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{1}{2} f(\alpha x+(1-\alpha)y) + \frac{1}{2} f(x)\right] + \frac{1-\alpha}{\alpha+1} f(y)$$

$$\le \frac{\cancel{2}\alpha}{\alpha+1}\left[\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)\right] + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha+1} f(y)$$

$$= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \ , \quad \text{czyli}$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

a więc f jest na A ściśle wypukła.

Uwaga: Istnieją funkcje spełniające

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

nieciągłe i niewypukłe (a więc założenie ciągłości jest istotne).

Przykład (szkic)

Elementy $\mathbb{R}$ możemy dodawać do siebie i mnożyć przez elementy ciała $\mathbb{Q}$ – możemy więc $\mathbb{R}$ traktować jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$. (ozn. $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$).

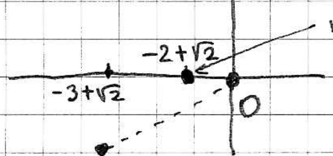
W $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ para $\{1, \sqrt{2}\}$ jest liniowo niezależna (nad $\mathbb{Q}$), bo gdyby była lin. zal., to $\cancel{\exists_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}}}$ $\exists_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ $\alpha\cdot 1=\sqrt{2}$ $\cancel{\alpha\cdot 1+\beta\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ↯. Parę $\{1,\sqrt{2}\}$ możemy uzupełnić do bazy $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

Niech teraz F będzie przekształceniem liniowym (nad $\mathbb{Q}$) z $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ w $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Wystarczy je zadać na bazie: $F(1)=1$, $F(\sqrt{2})=2$, na pozostałych elementach bazy jakkolwiek, np. 0.

$$F(0)=0, \quad F(-3+\sqrt{2}) = -3\cdot F(1)+1\cdot F(\sqrt{2}) = -3+2=-1$$

$$F(-2+\sqrt{2}) = -2\,F(1)+1\cdot F(\sqrt{2}) = -2+2=0$$



nad sieczną! więc F nie jest wypukła

Ale $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad F\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)$,

bo F liniowa nad $\mathbb{Q}$!

~~Wniosek~~: Wnioski:

1. exp jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$:

$$\underset{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\ x\neq y}}{\forall} \quad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \overset{?}{<} \frac{\exp(x)+\exp(y)}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\exp(x) - 2\exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{y}{2}\right) + \exp(y)}{2} \overset{?}{>} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\exp\left(\frac{x}{2}\right) - \exp\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2 \overset{?}{>} 0$$

prawda, o ile

$$\exp\left(\frac{x}{2}\right) \neq \exp\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$x \neq y$. ok.

2. ln ściśle wklęsły na $(0,\infty)$:

z ① $\quad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\exp(x)+\exp(y)}{2} \quad \underset{x\neq y}{\forall}$

przykładamy ln (rosnący)

$$\underset{x,y}{\forall} \quad \frac{x+y}{2} < \ln\left(\frac{\exp(x)+\exp(y)}{2}\right)$$

niech $x = \ln t$, $y = \ln s$ $\quad x\neq y \Leftrightarrow t\neq s$

$$\frac{\ln t + \ln s}{2} < \ln\left(\frac{t+s}{2}\right) \quad \text{~~czy~~ dla } t\neq s$$

czyli ln ściśle wklęsły

Pytanie: $f: A \to \mathbb{R}$ różnowart. wypukła.
Czy $f^{-1}: f(A) \to A$ jest wklęsła?

Twierdzenie (nierówność Jensena)

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925)

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie wypukła, ($\Rightarrow A$ wypukły)

Wówczas dla dowolnych

- $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$

oraz

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ takich, że $\forall_i \ \alpha_i \geq 0$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$

zachodzi nierówność

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \overset{(*)}{\leq} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Jeżeli funkcja f jest ściśle wypukła na A, to nierówność $(*)$ jest równością wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi ~~jedna~~ z któryś z poniższych warunków:

a) wszystkie x_i takie, że $\alpha_i \neq 0$ są sobie równe

b) $\exists_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \ \alpha_j = 1 \quad (\Rightarrow \forall_{i \neq j} \ \alpha_i = 0)$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji wklęsłych, zmienia się jedynie kierunek nierówności $(*)$.

Dowód nier. Jensena (indukcja ze względu na n).

- dla $n=1$ w (*) mamy w oczywisty sposób równość, bo $\alpha_1 = 1$

- dla $n=2$ nierówność Jensena to po prostu definicja wypukłości / ścisłej wypukłości funkcji f.

Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi teza twierdzenia (a więc $\forall_{x_1,\dots,x_n \in A} \ \forall_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=1}}$ zachodzi *).

Wykażemy, że analogiczna nierówność zachodzi dla $n+1$.

(Po drodze udowodnimy - również indukcyjnie - - prosty lemat: $\forall_{x_1,\dots,x_n \in A} \ \forall_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=1}} \ \underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}_{\text{kombinacja wypukła}} \in A$

liczb $x_1,\dots,x_n$ o współczynnikach $\alpha_1,\dots,\alpha_n$..

Dla $n=1$ i $n=2$ lemat jest oczywisty.)

Weźmy zatem dowolne $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \geq 0$ tż. $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n+1}=1$.

Jeżeli $\alpha_{n+1}=1$, to $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ i nierówność

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

jest oczywista.

Możemy zatem założyć, że $\alpha_{n+1} < 1$.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \left[\overbrace{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{n+1}}}^{\beta_1} x_1 + \overbrace{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_{n+1}}}^{\beta_2} x_2 + \dots + \overbrace{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_{n+1}}}^{\beta_n} x_n \right] (1-\alpha_{n+1}) +$$

$$+ \alpha_{n+1} x_{n+1} = \left[\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \right] (1-\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \dots$$

Oznaczmy $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$ przez z. Łatwo można sprawdzić, że $\beta_1 + \ldots + \beta_n = 1$, $\forall_i\ \beta_i \geq 0$, więc z zał. indukcyjnego lematu $z \in A$.

$$\ldots = (1-\alpha_{n+1}) \underset{A}{\underset{\Uparrow}{z}} + \alpha_{n+1} \underset{A}{\underset{\Uparrow}{x_{n+1}}}$$

skoro $1-\alpha_{n+1} \geq 0$ i $(1-\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1} = 1$, to z wypukłości zbioru A $(1-\alpha_{n+1}) z + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in A$.

(wykonaliśmy krok indukcyjny w dowodzie lematu).

Możemy więc obliczyć wartość f w $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}$:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f((1-\alpha_{n+1}) z + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \overset{① \leftarrow \text{wypukłość } f}{\leq} (1-\alpha_{n+1}) f(z) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= (1-\alpha_{n+1}) f(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \overset{② \leftarrow \text{zał. indukcyjne}}{\leq}$$

$$\leq (1-\alpha_{n+1})(\beta_1 f(x_1) + \ldots + \beta_n f(x_n)) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

To prawie koniec kroku indukcyjnego, pozostaje pytanie, kiedy w powyższej nierówności mamy równość. Aby tak było, równość musi zajść w ① i w ②.

W ① równość, gdy f jest ściśle wypukła, ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_{n+1} = 0$ ($\alpha_{n+1} = 1$ wykluczyliśmy wcześniej) lub gdy $x_{n+1} = z$

W ② – z zał. ind. równość (dla f ściśle wypukłej) mamy wtedy i tylko wtedy, gdy:

- któraś z $\beta_i = 1$, pozostałe są $= 0$

lub
- wszystkie x_i t. że $\beta_i \neq 0$ są sobie równe.

W ① i w ② mamy po 2 możliwości zajścia równości; co w sumie daje 4 możliwości:

• $\alpha_{n+1}=0$, ~~któraś z~~ $\exists_{i\in\{1,\dots,n\}}:$ $\beta_i = 1$, pozostałe są $=0$

$$\Rightarrow \alpha_i = 1, \quad \forall_{j\neq i}\ \alpha_j = 0$$

• $x_{n+1}=z$, $\underbrace{\exists_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \beta_i=1, \text{ pozostałe } \beta_j=0}$ $\Rightarrow \alpha_j=0$ dla $j\neq i$, $1\le j\le n$

$$\Downarrow$$

$$z = x_i$$

czyli $x_{n+1} = z = x_i$, więc wszystkie x_i, $i\in\{1,\dots,n+1\}$, takie, że $\alpha_i\neq 0$, są sobie równe

• $\alpha_{n+1}=0$, $\underbrace{\text{wszystkie } x_i \text{ tż. } \beta_i\neq 0,\ i\in\{1,\dots,n\} \text{ są sobie równe}}$ (~~$=x$~~)

$$\Downarrow$$

~~wtedy~~ ~~$z=x$~~

wtedy wszystkie x_i, $i\in\{1,\dots,n+1\}$, takie, że $\alpha_i\neq 0$, są sobie równe

• $x_{n+1}=z$, wszystkie x_i, $i\in\{1,\dots,n\}$ tż. $\beta_i\neq 0$ są sobie równe; ~~tą~~
Niech x będzie tą wspólną wartością x_i. Wtedy $z=x$, więc $x_{n+1}=x$ i wszystkie x_i, $i\in\{1,\dots,n+1\}$ tż $\alpha_{n+1}\neq 0$ są sobie równe. □

Zastosowania

1. Nierówność między średnimi

Wiemy, że ln jest ściśle wklęsły na $(0,\infty)$, więc

$$\forall_{x_1,\dots,x_n>0}\quad \ln\left(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\dots+\frac{1}{n}x_n\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln x_1+\dots+\frac{1}{n}\ln x_n$$

(i równość $\iff x_1=x_2=\dots=x_n$)

czyli $$\ln\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \geqslant \ln\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$$

ln jest rosnący, więc

$$\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1=\dots=x_n$.

2. <u>Nierówność Younga</u> Niech $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Wówczas $\forall_{x,y\geq 0}$ $xy \leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$.

<u>Dowód</u>:

William Henry Young (1863–1942)
mąż Grace Chisholm Young
ojciec Laurence Chisholm Young

Skorzystamy z wklęsłości logarytmu:

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q$$
$$= \ln x+\ln y = \ln xy$$

a że ln jest rosnący, to

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q \geqslant xy.$$

Równość $\iff x^p=y^q$.

3. <u>Nierówność Höldera</u> Niech $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Dla dowolnych $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\geq 0$

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$

Otto Ludwig Hölder (1859–1937)

<u>Dowód</u>:

Oznaczmy $A=\sum_{i=1}^n x_i^p$, $B=\sum_{i=1}^n y_i^q$

I załóżmy, że $A=B=1$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \underset{\text{n. Younga}}{\leq} \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n y^q=\frac{1}{p}A+\frac{1}{q}B$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=A^{1/p}B^{1/q}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$

II jeżeli $A=0$, to $\forall_i\ x_i=0$ i nierówność jest oczywista;
jeżeli $B=0$, to analogicznie $\forall_i\ y_i=0$ ...

$\overline{\underline{III}}$ Jeżeli $A, B > 0$, to niech

$$a_i = \frac{x_i}{A^{1/p}} \qquad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

$$b_i = \frac{y_i}{B^{1/q}} \qquad \text{———— " ————}$$

Wtedy $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n} x_i^p = \frac{1}{A} \cdot A = 1.$

i tak samo $\sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1,$

więc z $\overline{\underline{I}}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{A^{1/p} B^{1/q}} \implies \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le A^{1/p} B^{1/q} \qquad D.$$

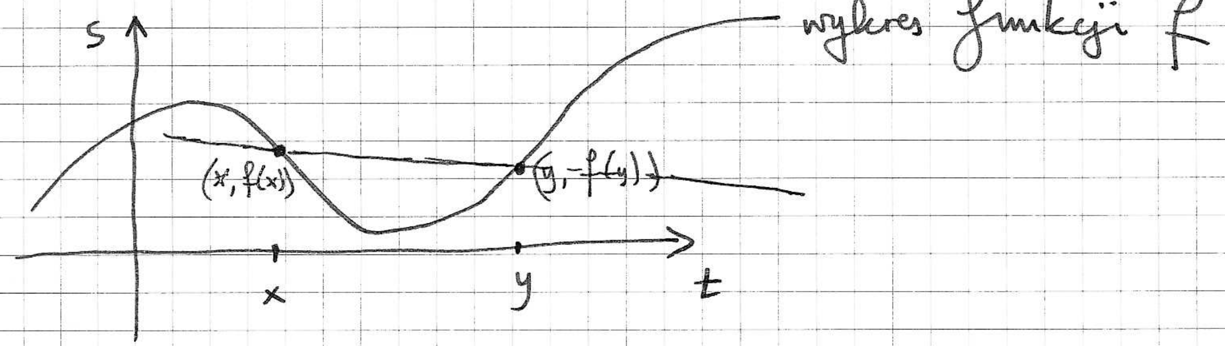
Kiedy w n. Höldera zachodzi równość?

przedział

Niech $f : P \to \mathbb{R}$. <u>Ilorazem różnicowym</u> funkcji f w punktach $x, y \in P$, $x \neq y$, nazywamy wyrażenie $I(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Oczywiście $\underset{x,y,\, x\neq y}{\forall} \quad I(x,y) = I(y,x)$.

<u>Interpretacja geometryczna</u>:



Jaki jest wzór prostej siecznej przechodzącej przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$?

$$s = at + b, \qquad \begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(y) = ay + b \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(y) = a(x-y)$$

$$a = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Można dalej wyliczyć b;

$$s = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-y) + f(y) = I(x,y)\,t + b$$

W każdym razie $I(x,y)$ to współczynnik kierunkowy siecznej poprowadzonej przez $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$.

<u>Lemat</u>: Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie wypukła na P, $x, y \in P$, $x < y$, $z \in (x,y)$. Wówczas
$$I(x,z) \leq I(x,y),$$
$$I(x,y) \leq I(z,y),$$
i jeżeli f jest ściśle wypukła, to nierówności te są ostre.

Dowód lematu: Skoro $z \in (x,y)$, to możemy z zapisać jako $\alpha x + (1-\alpha)y$:

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y = y + \alpha(x-y) \Rightarrow \alpha = \frac{y-z}{y-x}, \quad 1-\alpha = \frac{z-x}{y-x}$$

Mamy $f(z) = f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

$$\cancel{\frac{y-z}{y-x} f(z) + \frac{z-x}{y-x} f(z) \le \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)}$$

$$= f(y) + \alpha\big(f(x) - f(y)\big)$$

stąd $\alpha\big(f(x) - f(y)\big) \geq f(z) - f(y) \qquad / \cdot (-1)$

$$\frac{y-z}{y-x}\big(f(y) - f(x)\big) \le f(y) - f(z)$$

$$I(x,y) = I(y,x) \le I(y,z) = I(z,y)$$

Analogicznie

$$f(z) - f(x) \le (\alpha - 1) f(x) + (1-\alpha) f(y) =$$

$$= (1-\alpha)\big(f(y) - f(x)\big)$$

$$= \frac{z-x}{y-x}\big(f(y) - f(x)\big)$$

Stąd natychmiast mamy $I(x,z) \le I(x,y)$.

Gdy f jest ściśle wypukła, nierówności są ostre (bo $z \in (x,y) \Leftrightarrow \alpha \in (0,1)$).

Wniosek - twierdzenie: Niech $f: P \to \mathbb{R}$ będzie wypukła, $x \neq y$, $u \neq v \in P$. Jeżeli $x \le u$, $y \le v$, to $I(x,y) \le I(u,v)$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$, $y = v$.

dla f ściśle wypukłej

Dowód: $I(y,x) = I(x,y)$, bez straty ogólności możemy więc założyć, że $x < y$. Wtedy $x < v$. Jeżeli $y = v$, to $I(x,y) = I(x,v)$, w przeciwnym razie $y \in (x,v)$

i z lematu $I(x,y) \leq I(x,v)$.

Jeżeli teraz $u > v$, to $I(x,v) \leq I(x,u) \leq I(v,u)$;

jeżeli zaś $u < v$, to $I(x,v) \leq I(u,v)$. $\quad$ " $I(u,v)$

(wszystkie nierówności z lematu)

Wszystkie powyższe nierówności są, dla f ściśle wypukłej, ostre, chyba, że $x=u$, $y=v$.

Twierdzenie Niech $f:(a,b)$ będzie wypukła. Wówczas f jest na (a,b) ciągła.

Dowód: Niech $x<y$, $x,y \in (a,b)$. Wykażemy, że f spełnia na $[x,y]$ warunek Lipschitza, a więc jest na $[x,y]$ ciągła.

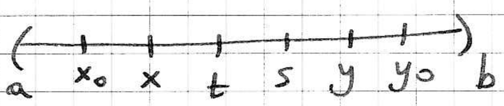
~~Niech $x_0 \in (a,x)$, $y_0 \in (y,b)$~~

Weźmy dowolne $t,s \in [x,y]$

Dla $t=s$ oczywiście $\underbrace{|f(t)-f(s)|}_{0} \leq \underbrace{L|t-s|}_{\leq L\cdot 0}$ (dla dow. L)

~~Jeżeli $t \neq s$, to~~ $\quad$ ~~$I(t,s)$~~

Niech $x_0 \in (a,x)$, $y_0 \in (y,b)$



$$I(x_0,x) \leq I(t,s) \leq I(y,y_0)$$

więc $\quad |I(t,s)| \leq \max\left(|I(y,y_0)|, |I(x_0,x)|\right) = L$

$$\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|} \leq L \iff |f(t)-f(s)| \leq L|t-s|.$$

Dla każdego $z \in (a,b)$ znajdziemy $x,y \in (a,b)$ tż $z \in [x,y] \subset (a,b)$; skoro f jest lipszycowska na $[x,y]$, to jest w szczególności ciągła w z.