

Tw: Niech  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie monotoniczna i niech  $f(A)$  będzie odcinkiem, prostą lub półprostą. Wówczas  $f$  jest ciągła.

Dowód: Zażyjmy bez straty ogólności, że  $f$  jest niemalejąca. Jeżeli  $x_0$  jest punktem izolowanym  $A$ , to  $f$  jest w  $x_0$  automatycznie ciągła.

Zażyjmy zatem, że  $x_0 \in A \cap \text{Acc } A$ .

W  $x_0$  możemy obliczać lewo- i/lub prawostronną granicę  $f$  (w zól. od tego, czy  $x_0 \in \text{Acc}(A \cap (-\infty, x_0])$ , czy  $x_0 \in \text{Acc}(A \cap (x_0, +\infty))$ ).

Zażyjmy, że  $x_0 \in \text{Acc}(A \cap (-\infty, x_0])$ . Z tego, że  $f$  jest monotoniczna, wiemy, że istnieje  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ; oczywiście  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$  (bo  $\forall x < x_0, f(x) \leq f(x_0)$ ).

Jeżeli tu nie ma równości, to  $\forall x < x_0, f(x) < \sup_{x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ;  $\forall x \geq x_0, f(x) \geq f(x_0)$  i w zbiorze wartości

jest dziura - nie ma w nim żadnej wartości z przedziału  $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0))$ . A w prostej, półprostej czy odcinku dziur nie ma.

Analogicznie dowodzimy, że jeżeli ma sens  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , to jest równa  $f(x_0)$ .

Jeżeli teraz  $(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, \forall n, x_n \in A \setminus \{x_0\}$ , to albo  $(x_n)$  nadaje się do obliczania granicy lewostronnej ( ~~$x_n < x_0$~~ ) (dod  $x_n < x_0$ ), albo prawostronnej (dod  $x_n > x_0$ ), albo możemy go podzielić na podciąg wyrazów  $< x_0$  i podciąg wyrazów  $> x_0$ . Takie czy takie dostajemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right\} = f(x_0)$ , czyli  $f$  jest ciągła w  $x_0$ .

Twierdzenie Niech  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $I$  jest przedziałem, i niech  $f$  będzie na  $I$  ciągła. Wówczas  $f$  jest różnowartościowa  $\Leftrightarrow f$  jest ściśle monotoniczna.

155

Dowód: ( $\Leftarrow$ ) Jeżeli  $f$  jest ściśle monotoniczna, to jest różnowartościowa.

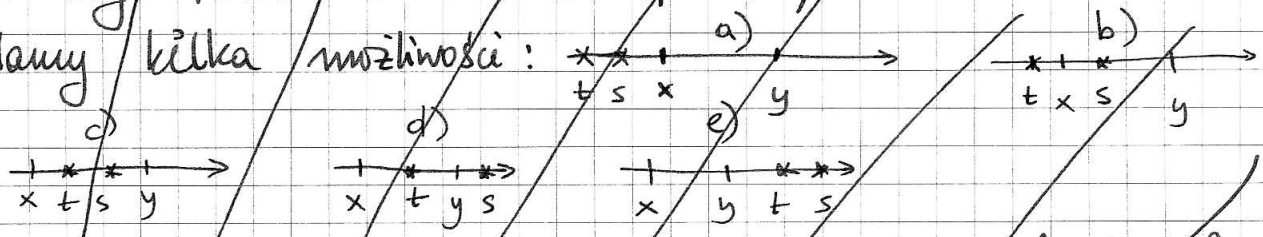
( $\Rightarrow$ ) Założymy, że  $f$  jest różnowartościowa, ale nie jest ściśle monotoniczna. Niech  $x < y, x, y \in I$ .

Mamy albo ①  $f(x) < f(y)$ , albo ②  $f(x) > f(y)$

Możemy założyć, że zachodzi ①, w p.p. zastępujemy funkcję  $f$  funkcją  $-f$ .

Weźmy teraz dowolne  $t, s \in I, t < s$ .

Mamy kilka możliwości:



wykażemy, że w każdym przypadku  $f(t) < f(s)$ .  
Założymy bowiem przeciwnie.

1. Zaważmy najpierw, że jeżeli  $\alpha < \beta < \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in I$ ,

to  $f(\beta)$  leży między  $f(\alpha)$  a  $f(\gamma)$ . Przyjmijmy bowiem, że  $f(\alpha) < f(\gamma)$  (w p.p. zastępujemy  $f$  przez  $-f$ ).

Jeżeli  $f(\beta) < f(\alpha)$ , to w przedziale  $f(\alpha) \in (f(\beta), f(\gamma))$ , więc w  $(\beta, \gamma)$  znajdą  $\xi$  t.j.  $f(\xi) = f(\alpha)$   $\Leftarrow$  z różnowart. z w. Darboux.

Jeżeli  $f(\beta) > f(\gamma)$ , to  $f(\gamma) \in (f(\alpha), f(\beta))$  i w  $(\alpha, \beta)$  znajdą  $\xi$  t.j.  $f(\xi) = f(\gamma)$   $\Leftarrow$ . Stąd  $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ .

2. Założymy teraz, że dla pewnych  $x < y, x, y \in I$   $f(x) < f(y)$ .  
Niech  $t, s \in I, t < s$ .

Mamy 5 możliwości:  $t < s < x < y$ ,  $t < x < s < y$ ,  $x < t < s < y$ ,  
 ~~$x < s < y$~~   $x < t < y < s$ ,  $x < y < t < s$ .

Wykażemy, że w każdym z nich  $f(t) < f(s)$ .

Gdyby bowiem  $f(t) > f(s)$ , to 1.  $f(s)$  leży między  $f(t)$  a  $f(x) \Rightarrow f(s) > f(x)$ , ale również z 1.  $f(x)$  leży między  $f(s)$  a  $f(y) \Rightarrow f(s) < f(x)$   $\perp$

2)  $f(x) \in (f(s), f(t)) \Rightarrow f(x) > f(s)$ , ale  $f(s) \in (f(x), f(y)) \Rightarrow f(x) < f(s)$   $\perp$

3)  ~~$f(t) \in (f(x), f(s))$~~   $f(t)$  leży między  $f(x)$  a  $f(s)$ .  $\Rightarrow f(x) > f(t)$

a)  ~~$f(t) > f(x)$ , to  $f(t) < f(s)$~~   $\perp$

ale  $f(s)$  leży między  $f(t)$  a  $f(y) \Rightarrow f(t) > f(y) > f(x)$   $\downarrow$

4)  $f(t)$  leży między  $f(x)$  a  $f(y) \Rightarrow f(t) < f(y)$ , ale  $f(y)$  leży między  $f(t)$  a  $f(s) \Rightarrow f(t) > f(y)$   $\perp$

5)  $f(y)$  leży między  $f(t)$  a  $f(x) \Rightarrow f(t) > f(y)$ , ale  $f(t)$  leży między  $f(y)$  a  $f(s) \Rightarrow f(y) > f(t)$   $\downarrow$

□

Twierdzenie: Jeżeli  $f$  jest różnowartościowa na  $I$ , to funkcja odwrotna do  $f$ , ozn.  $f^{-1}$ , jest ciągła na  $f(I)$ .

Dowód 1. Z poprzedniego twierdzenia  $f$  jest ściśle monotoniczna. Funkcja odwrotna do funkcji ściśle monotonicznej jest ściśle monotoniczna (npw. ćwiczenie z WdM), obrazem  $f^{-1}$  jest przedział  $I$ , zatem  $f^{-1}$  jest ciągła.

Dowód 2. Gdy  $I = [a, b]$  nie wprost. Skoro  $f^{-1}$  nie jest ciągła w  $f(I)$ , to istnieje ciąg  $(z_n)$  zbieżny w  $f(I)$  do  $z_0$ , że  $f^{-1}(z_n) \not\rightarrow f^{-1}(z_0)$  (czyli ta ostatnia granica albo nie istnieje, albo jest  $\neq z_0$ ).

Niech teraz  $x_n = f^{-1}(z_n)$ ,  $x_0 = f^{-1}(z_0)$ .

Skoro  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$  nie dąży do  $x_0$ , to istnieje podciąg  $(x_{n_k}) = (\tilde{x}_k)$  ciągu  $(x_n)$  taki, że dla pewnego  $\varepsilon > 0$  i  $\forall k \in \mathbb{N}$   $|\tilde{x}_k - x_0| \geq \varepsilon$

Z ciągu  $(\tilde{x}_k)$  możemy, na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg  $(\check{x}_l) = (\check{x}_l)$  zbieżny do pewnego  $\check{x}_0 \in [a, b]$ ; oczywiście  $x_0 \neq \check{x}_0$

Z ciągłości funkcji  $f$  mamy

$$\begin{aligned} f(\check{x}_0) &= f(\lim_{l \rightarrow \infty} \check{x}_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(\check{x}_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} z_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = f(x_0) \end{aligned}$$

co jest sprzeczne z różnowartościowością  $f$  (mamy, że  $\check{x}_0 \neq x_0$ ).

### Jednostajna ciągłość

Def Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła na  $A$ ,  $\Leftrightarrow$  gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Porównajmy tę definicję z poprzednie napisaną definicję ciągłości na  $A$ :

$$\forall x \in A \underbrace{\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \forall y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}_{\text{ciągłość w punkcie } x}$$

Różnica jest tylko w kolejności lewantyfikatorów:  
gdy  $f$  jest jednostajnie ciągła, przepis na dobieranie  $\delta$  do  $\epsilon$  nie zależy od wyboru punktu  $x$ ;  
ten sam przepis "chiata" we wszystkich  $x \in A$ .

### Przykłady

1. sinus jest jednostajnie ciągły na  $\mathbb{R}$ .

Zauważmy najpierw, że  $\forall_{x \in \mathbb{R}} |\sin x| \leq |x|$ . (\*)

Dla  $x \in (0, 2]$  uolowodniłismy, że  $0 < \sin x < x$ ;

dla  $x > 2$   $|\sin x| \leq 1$ , więc (\*) zachodzi,

dla  $x = 0$   $|\sin x| = |x| = 0$

dla  $x \in [-2, 0)$  mamy  $x < \sin x < 0$

(bo  $\sin x = -\sin(-x)$ ,  $-x \in (0, 2]$  i korzystamy z \*),

więc  $|\sin x| < |x|$ ,

dla  $x < -2$   $|x| > 2$ ,  $|\sin x| \leq 1$ , więc (\*) zachodzi.

$$\text{Teraz } \forall_{x, y \in \mathbb{R}} |\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \stackrel{(*)}{\leq} 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|.$$

Jeżeli więc dla ustalonego  $\epsilon > 0$  przyjmujemy  $\delta = \epsilon$ ,  
to jeżeli  $|x-y| < \delta = \epsilon$ , to  $|\sin x - \sin y| < \epsilon$ .

(podaliśmy przepis dobry dla każdego  $x$ ).

2. ~~nie~~  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  nie jest jednostajnie ciągła na  $(0, 1)$ . (choć jest na  $(0, 1)$  ciągła).

Gdyby bowiem była, to ustalmy  $\epsilon = \frac{1}{2}$  i niech  $\delta > 0$  będzie dobrana do tego ustalonego  $\epsilon$ .

$$\forall_{x, y \in (0, 1)} |x-y| < \delta \Rightarrow \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{2}.$$

Niech teraz  $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ .

$\forall_n f(x_n) = 1$ ,  $f(y_n) = -1$ , zatem  $\forall_n |f(x_n) - f(y_n)| = 2$ ,

choć  $|x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |0 - 0| = 0$ , więc dddu  $|x_n - y_n| < \delta$ ,  
jaka by  $\delta$  nie była.

3.  $f(x) = x^2$  nie jest jednostajnie ciągła na  $(0, \infty)$ .

Dobierzmy bowiem  $\delta > 0$  do  $\epsilon = 1$ . (dowód nie wprost)  
i niech  $y = x - \frac{\delta}{2}$  (wtedy  $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ).

Mamy  $f(x) - f(y) = x^2 - (x - \frac{\delta}{2})^2 = x\delta - \frac{\delta^2}{4}$   
i jeżeli tylko  $x > \frac{1 + \delta^2}{\delta}$ , to

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) > \delta \cdot \frac{1 + \delta^2}{\delta} - \frac{\delta^2}{4} = 1 = \epsilon.$$

- sprzeczność.  $\downarrow$

Def. Mówimy, że  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia na  $A$  warunek Lipschitza  
(ze stałą  $L$ ), lub: jest lipszycowska (ze stałą  $L$ ),  
jeżeli  $\forall_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Przykłady: 1.  $x \mapsto \sin x$  jest lipszycowska ze stałą 1.

2.  $x^2$  jest lipszycowska na  $[0, 2]$  ze stałą 4,

bo  $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 4|x - y|$ , gdy  $x, y \in [0, 2]$ .

3.  $\sqrt{x}$  nie jest lipszycowska na  $[0, 1]$ . (z żadną stałą).

Zatdźmy bowiem, że  $\exists L > 0 : \forall_{x, y \in [0, 1]} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ .

Niech  $x_n = \frac{2}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$ . Podstawiając  $x = x_n$ ,  $y = y_n$  mamy

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq L \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}(\sqrt{2} - 1) \leq L \leftarrow \text{to ma zachod-}$$

zić  $\forall_{n \in \mathbb{N}}$  - ale nie może, bo lewa strona dąży do  $\infty$ ,  
gdy  $n \rightarrow \infty$ .  $\downarrow$

Twierdzenie: Jeżeli  $f$  jest Lipszycaowska na  $A$ , to jest na  $A$  jednostajnie ciągła. (w szczególności jest ciągła).

Dowód: powtarzamy argument dla sinusa.

160

Wtedy, że dla pewnej stałej  $L > 0$

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

~~Jeżeli~~ Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i przyjmijmy  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ . ← przepis, nierad. od wyboru  $x$ .

Jeżeli tylko  $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ , to

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \delta L = \varepsilon.$$

Georg Ferdinand Ludwik Philipp Cantor (1845-1918)

Twierdzenie (Heine - Cantora)

Jeżeli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[a, b]$ , to jest na  $[a, b]$  jednostajnie ciągła.

(Inaczej: każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła).

Dowód: (nie wprost).

Załóżmy, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest na  $[a, b]$  ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła, czyli

$$\sim (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \quad \text{nie zachodzi}$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \quad A_\delta = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Rozważmy rodzinę  $\{A_{1/n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  - jest to rodzina zbiorów niepustych, możemy więc (znów pewnik wyboru) wybrać

selektor: ciąg  $(x_n, y_n)$  t.j.  $\forall_n (x_n, y_n) \in A_{1/n}$ ;

inaczej: istnieją ciągi  $(x_n)$  i  $(y_n)$  elementów  $[a, b]$  t.j.

$$\forall_n |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Z tw. Bohana - Weierstrassa z ciągu  $(x_n)$  możemy wybrać podciąg  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  zbieżny do pewnego  $x_0 \in [a, b]$ . Wiemy, że  $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , (161)

zatem  $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$  ( $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ ).

Funkcja  $f$  jest ciągła, zatem  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$ , ale wówczas

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| \xleftarrow{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{(z tw.} \\ \text{o szacowaniu)} \end{array}$$

↑  
dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . □

Wniosek: Istnieją funkcje jednostajnie ciągłe nie spełniające warunku Lipschitza, np.  $f(x) = \sqrt{x}$  jest jednostajnie ciągła na  $[0, 1]$ , choć nie jest na tym zbiorze Lipszytowska.

Twierdzenie: Funkcja ciągła na odcinku otwartym jest na nim jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jej granice jednostronne w końcach odcinka.

Zapisany treść tego twierdzenia nieco precyzyjniej:

Niech  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła na  $(a, b)$ .

Funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

