Cały czas szeregi o wyrazach nieujemnych!

Kryterium Raabego

Joseph Ludwig Raabe (1801 – 1859) urodzony w Brodach, w biednej galicyjskiej rodzinie żydowskiej, studiował w Wiedniu, potem przeniósł się do Zurichu; w 1855 współtworzył ETH (szwajcarską politechnikę, jeden z najlepszych obecnie ośrodków naukowych w Europie).

Niech dddn $a_n > 0$.

Zdefiniujmy ciąg

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Jeżeli

(•) istnieje $r > 1$ takie, że dddn $R_n > r$

(na przykład gdy $\lim\limits_{n\to\infty} R_n > 1$),

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

(••) Dddn $R_n \leq 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód:

Na początek pomocniczy rachunek: obliczymy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}}$ dla $s \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(s\ln(1+\frac{1}{n})) - 1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(s\ln(1+1/n)) - 1}{\underbrace{s\ln(1+\frac{1}{n})}_{\to 0}} \cdot s \cdot \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1 \cdot s \cdot 1 = s$$

(•)

Skoro dddn $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r$, to $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{r}{n} + 1$

Weźmy teraz $s \in (1, r)$. Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+1/n)^s - 1}{1/n} = s < r$,

więc dddn $\dfrac{(1+1/n)^s - 1}{1/n} < r$, czyli $\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$

Mamy zatem $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \dfrac{r}{n} > \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^s$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} \qquad \text{(dddn)}$$

Skoro $s > 1$, szereg $\sum \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny i z kryterium porównawczego II go rodzaju dostajemy zbieżność $\sum a_n$.

(••) Jeżeli dddn $R_n \leq 1$, to

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

Dddn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ i z rozbieżności $\sum \frac{1}{n}$ i ~~k~~ kryterium porównawczego II-go rodzaju dostajemy rozbieżność $\sum a_n$ □

Przykład: Niech $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$.
Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny?

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, więc kryterium d'Alemberta (ani Cauchy'ego) nie rozstrzygnie tego zadania.

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

zatem dddn $R_n \leq 1$ i szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny

Kryterium Kummera ($\overset{\text{dddn}}{a_n > 0}$)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb dodatnich i stała $\varrho > 0$ takie, że dddn

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geq \varrho .$$

Ernst Kummer (1810–1893) studiował w Halle, potem uczył m.in. w Liegnitz; tam wśród uczniów miał np. Leopolda Kroneckera. W 1842 został profesorem w Breslau, a w 1855 przeniósł się do Berlina, gdzie z Karlem Weierstrassem stworzył jeden z najlepszych wówczas ośrodków matematycznych na świecie. Teść Hermanna Schwarza

Kładąc $\forall_n\, b_n = 1$ otrzymujemy wzmocnienie kryterium d'Alemberta: $\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot 1 - 1 \geq \varrho \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\varrho}$

Jeżeli istnieje $\varrho>0$ t.ż. dddn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\varrho}$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny

(warunek ten jest spełniony np. gdy $g=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, wystarczy więc $\varrho \in \left(0, \frac{1-g}{g}\right)$)

Kładąc $\forall_n\, b_n = n$ odtwarzamy kryterium Raabego (proszę sprawdzić!)

Dowód:

$\Rightarrow$ Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, $a_n > 0$.

Niech $b_n = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{a_n} > 0$ Wówczas

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \frac{\cancel{a_n}}{a_{n+1}} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\cancel{a_n}} - \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{a_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{a_{n+1}}\left[(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots) - (a_{n+2}+a_{n+3}+\dots)\right]$$

$$= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 \geq 1 =: \varrho > 0$$

czyli ciąg (b_n) spełnia warunek z kryterium.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że istnieje $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall_n\, b_n \geq 0$ t.ż.

dddn $$\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geq \varrho$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \overset{(*)}{\geq} \varrho a_{n+1} > 0$$

a więc ciąg $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący.

Jest też ogr. z dołu (przez 0), a więc zbieżny (do $g \geq 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varrho}(a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = \frac{1}{\varrho}(a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\varrho}(a_1 b_1 - g),$$

więc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n - \quad b_{n+1})\frac{1}{\varrho}$ jest zbieżny i z kryt. porównawczego (*) $\sum a_n$ też jest zbieżny.

Asymptotyczne kryterium porównawcze – uzupełnienie

Przypomnijmy: Jeżeli $a_n, b_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ jest dodatnia i skończona, to $\sum a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \sum b_n$ jest zbieżny. Czy można coś wywnioskować, gdy g wprawdzie istnieje, ale jest 0 lub $+\infty$?

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, to dddn $\frac{a_n}{b_n} > 1$, więc

dddn $a_n > b_n$

i z rozbieżności $\sum b_n$ wynika rozbieżność $\sum a_n$

a ze zbieżności $\sum a_n$ zbieżność $\sum b_n$.

Uwaga! z rozbieżności $\sum a_n$ nic o $\sum b_n$ w tym przypadku nie wynika!

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\sum a_n$ i $\sum b_n$ rozbieżne

ale $\tilde{b}_n = \frac{1}{n^2}$, $\frac{a_n}{\tilde{b}_n} = n\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, choć $\sum \tilde{b}_n$ zbieżny

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, to dddn $\frac{a_n}{b_n} < 1 \Leftrightarrow a_n < b_n$

ze zbieżności $\sum b_n \Rightarrow$ zbieżność $\sum a_n$

z rozbieżności $\sum a_n \Rightarrow$ rozbieżność $\sum b_n$

ale np. z rozbieżności $\sum b_n$ nic o $\sum a_n$ nie wynika.

(przykłady proszę samodzielnie ułożyć)

<u>Pytanie</u>: Czy istnieje taki szereg, który – gdy użyjemy go w asymptotycznym kryterium porównawczym – rozstrzygnie, czy badany szereg jest zbieżny?
Innymi słowy: czy istnieje taki szereg $\sum b_n$ (o wyrazach nieujemnych), że

① $\sum b_n$ jest zbieżny

ale ② jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, to $\sum a_n$ jest rozbieżny?

Byłby to szereg najwolniej zbieżny

A może istnieje szereg najwolniej rozbieżny: $\sum b_n$ taki, że ① $\sum b_n$ jest rozbieżny,

ale ② jeżeli $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, to $\sum a_n$ jest zbieżny?

Na oba pytania odpowiedź brzmi NIE.

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnego zbieżnego szeregu $\sum b_n$ o wyrazach nieujemnych istnieje zbieżny szereg $\sum a_n$, $b_n \geq 0$, taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

<u>Dowód</u>: Oznaczmy $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $R_n = S - S_n$

Oczywiście, ze zbieżności $\sum b_n$, mamy, że $R_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Niech $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$. Mamy $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k = (\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}) + (\sqrt{R_2} - \sqrt{R_3}) + \ldots + (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) = \sqrt{R_1} - \sqrt{R_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{R_1} = \sqrt{S - S_1}$, więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny; mamy też $R_{n-1} - R_n = b_n \geq 0$, więc $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n} \geq 0$. Z drugiej strony

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}}{R_{n-1} - R_n} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{R_{n-1}}}_{\downarrow\, 0^+} + \underbrace{\sqrt{R_n}}_{\downarrow\, 0^+}} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty .$$

Podobnie z drugim pytaniem:

Twierdzenie (Abel, Dini):

Jeżeli szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny, $\forall_n\, b_n \geq 0$, to dla $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{S_n}$ też jest rozbieżny

Dowód: Sprawdzimy, że $\sum \frac{b_n}{S_n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego:

Wiemy, że ciąg (S_n) jest niemalejący (bo $\forall_n\, b_n \geq 0$).
Oszacujmy, dla $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{b_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{b_{n+k}}{S_{n+k}} \right| =: (*)$$

Wynik powinien, dla dost. dużych $n \in \mathbb{N}$, być mniejszy od ε (dla dowolnie wybranego $\varepsilon > 0$ $\exists_{n_0}\, \forall_{n > n_0}\, \forall_{k \in \mathbb{N}}$ $* < \varepsilon$).
Wartość bezwzględna jest niepotrzebna - wszystkie składniki są nieujemne. Mamy

$$(*) = \frac{b_{n+1}}{S_{n+1}} + \ldots + \frac{b_{n+k}}{S_{n+k}} \geq \frac{b_{n+1} + \ldots + b_{n+k}}{S_{n+k}} = \frac{S_{n+k} - S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$$

$S_{n+k} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$ bo $\sum b_n$ rozbieżny do $+\infty$.

Stąd dla dużych k $(*) \geq \frac{1}{2}$, jeżeli więc wybraliśmy np $\varepsilon = \frac{1}{4}$, to mamy sprzeczność. $\square$

Oczywiście kładąc $a_n = \frac{b_n}{S_n}$ mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = 0$.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Opuszczając bezpieczne wody szeregów o wyrazach nieujemnych tracimy kluczowe narzędzie - kryterium porównawcze (i wszystkie pochodzące od niego kryteria).
Okazuje się, że teoria szeregów o wyrazach rzeczywistych (niekoniecznie nieujemnych) nie staje się istotnie trudniejsza, gdy rozszerzymy ją do teorii szeregów o wyrazach zespolonych, a ta ostatnia pozwoli nam m.in. w ścisły sposób wprowadzić funkcje trygonometryczne.
Musimy jednak wpierw podać kilka definicji

Def: Mówimy, że ciąg $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb zespolonych jest zbieżny do $z \in \mathbb{C}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad |z_n - z| < \varepsilon$$

moduł liczby zespolonej.

Uwaga: $\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \quad \max(|a|,|b|) \leq |a+bi| \leq |a|+|b|$
Dowód: prościutkie ćwiczenie.

Wniosek: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

Dowód: Niech $z_n = a_n + ib_n$, $z = a+ib$.
($\Rightarrow$): Wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \; |z_n - z| < \varepsilon$. Mamy jednak

$$|z_n - z| = |(a_n-a)+i(b_n-b)|$$

$$\max(|a_n-a|,|b_n-b|) \leq |a_n-a+i(b_n-b)| < \varepsilon,$$

więc zarówno $|a_n-a|<\varepsilon$, jak i $|b_n-b|<\varepsilon$, o ile $n>n_0$.
To oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
($\Leftarrow$): Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|(a_n - a) + i(b_n - b)|}_{= |z_n - z|} \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$.

Tak więc zbieżność ciągów w $\mathbb{C}$ jest równoważna ze zbieżnością oddzielnie części rzeczywistej i urojonej ciągu.

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, gdy ciąg sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_n$ jest zbieżny.

Def: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. ← (uwaga: to jest szereg o wyrazach rzeczywistych nieujemnych!)

Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy warunkowo zbieżnym.

Przykłady: ① Jeżeli $|z| < 1$, to $\sum z^n$ jest bezwzgl. zbieżny

② $\sum (1)^{n-1} \frac{1}{n}$ jest zbieżny, ale $\sum \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right|$ nie, więc szereg anharmoniczny jest warunkowo zbieżny.

Twierdzenie Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód: Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny. Spełnia wówczas warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n_0} \; \forall_{n > n_0} \; \forall_{k} \quad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon .$$

Mamy jednak $\quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, więc jeżeli $\sum |a_n|$ spełnia w. Cauchy'ego, to $\sum a_n$ również, a więc $\sum a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie: Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzgl. zbieżny, to dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. permutacji indeksów) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ też jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie takie, że $\forall_{n > n_0} \forall_{k} \; |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{4}$ (w. Cauchy'ego dla $\sum |a_n|$).

(stąd wiemy, że $\sum_{l=n_0+1}^{\infty} |a_l| = \lim_{k \to \infty} \sum_{l=n_0+1}^{n_0+k} |a_l| \le \frac{\varepsilon}{4}$).

Niech m_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m_0)\} \supset \{1, 2, \dots, n_0\}$
(inaczej: $m_0 = \max\{\sigma^{-1}(l) : 1 \le l \le n_0\}$.
Wtedy dla $l > m_0$ wiemy, że $\sigma(l) > n_0$.

Teraz $\forall_{n > m_0} \forall_{k} \; |a_{\sigma(n)}| + |a_{\sigma(n)+1}| + \dots + |a_{\sigma(n)+k}| \le \sum_{l=n_0+1}^{\infty} |a_l| \le \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

te indeksy są większe niż n_0

co dowodzi, że szereg $\sum |a_{\sigma(n)}|$ jest zbieżny (spełnia warunek Cauchy'ego), a zatem $\sum a_{\sigma(n)}$ jest bezwzgl. zbieżny.

Niech teraz $S_n = \sum_{l=1}^{n} a_n$, $\tilde{S}_n = \sum_{l=1}^{n} a_{\sigma(n)}$, $R_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} a_l$, $\tilde{R}_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} a_{\sigma(l)}$,

$S = \sum_{l=1}^{\infty} a_n$, $\tilde{S}_n = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

$$|S - \tilde{S}| \le |S - S_{n_0} + S_{n_0} - \tilde{S}_{m_0} + \tilde{S}_{m_0} - \tilde{S}| \le$$

$$\le |S - S_{n_0}| + |\tilde{S} - \tilde{S}_{m_0}| + |S_{n_0} - \tilde{S}_{m_0}| =$$

$$= \left|\sum_{l=n_0+1}^{\infty} a_l\right| + \left|\sum_{l=m_0+1}^{\infty} a_{\sigma(l)}\right| + \left|\sum_{l=1}^{n_0} a_l - \sum_{l=1}^{m_0} a_{\sigma(l)}\right| \le$$

$$\le \sum_{l=n_0+1}^{\infty} |a_l| + \sum_{l=m_0+1}^{\infty} |a_{\sigma(l)}| + \sum_{l \in A_{n_0}} |a_l|$$, gdzie $\cancel{A_{n_0} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m_0)\}}$

$A_{n_0} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m_0)\} \setminus \{1, 2, \dots, n_0\}$

wszystkie indeksy są $> n_0$

$$\le 3 \sum_{l=n_0+1}^{\infty} |a_l| \le \frac{3}{4} \varepsilon < \varepsilon.$$ Z dowolności $\varepsilon > 0$ mamy $\tilde{S} = S$.

Mamy dwie kolejki: dodatnich wyrazów (b_k) i ujemnych (c_k).

Wypisujemy wyrazy b_k

$b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n_0}$

aż przekroczymy 17. Wtedy zatrzymujemy się i zaczynamy wypisywać ujemne wyrazy

$b_1+b_2+\dots+b_{n_0}+c_1+c_2+\dots+c_{m_0}$

aż suma spadnie poniżej 17.

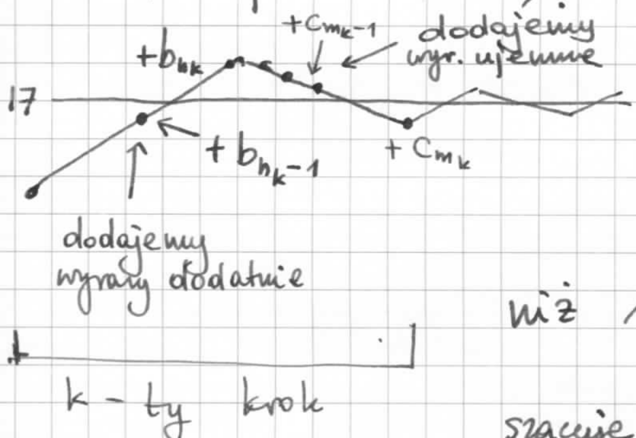
Wtedy ~~znów~~ wracamy do ciągu (b_k), aż suma przekroczy 17:

$$\underbrace{b_1+\dots+b_{n_0}+c_1+\dots+c_{m_0}}_{\text{I krok}}+\underbrace{b_{n_0+1}+\dots+b_{n_1}}_{\text{II krok}}$$

a potem do (c_k), aż suma spadnie poniżej 17, itd.

$$b_1+\dots+b_{n_0}+c_1+\dots+c_{m_0}+b_{n_0+1}+\dots+b_{n_1}+\dots$$

Co się dzieje z sumą?:



W k-tym kroku różnica między 17 a sumą częściową ~~nie przekracza~~ ~~$|c_{m_{k-1}}|$~~ ~~to~~ jest mniejsza niż $\max(|c_{m_{k-1}}|, |b_{n_k}|)$,

szacuje odległość ~~na~~ początku kroku

i na końcu

ale $c_{m_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ i $b_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$,

więc suma dąży do 17.