SZEREGI

Def. Szeregiem liczbowym nazywamy parę ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniających

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Elementy ciągu (a_n) nazywamy wyrazami szeregu, ciąg (S_n) to ciąg sum częściowych.

Szereg o wyrazach (a_n) oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; jeżeli ciąg (S_n) jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny; jeżeli ciąg (S_n) ma granicę (być może nieskończoną), to nazywamy ją sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ta dwuznaczność oznaczenia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ oznacza, że gdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ma sumę, to z kontekstu musimy domyślić się, czy chodzi o szereg, czy o jego sumę. Jeżeli szereg sumy nie ma, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ oznacza obiekt matematyczny - szereg, a nie liczbę!

Przykłady

① szereg geometryczny $1+q+q^2+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$.

$$S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$ o ile $q\neq 1$; $S_n = n$ dla $q=1$

Jeżeli $q\geq 1$, to $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = +\infty$

Jeżeli $q\in(-1,1)$, to $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

Jeżeli $q\leq -1$, to $\lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje (proste ćwiczenie).

Stąd szereg geometryczny jest zbieżny dla $|q|<1$, ma sumę dla $q>-1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & q \in (-1,1) \end{cases}$$

② Przyjrzyjmy się stanowniej szeregowi geometrycznemu dla $q=-1$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+\ldots = ?$$

dopiszmy nawiasy:

$$S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots = 0$$

lub

$$S = 1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-0-\ldots = 1$$

lub

$$S = 1-(1-1+1-1+\ldots) = 1-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$$

to ostatnie jest zgodne z wzorem $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$ ☺

W szeregach może zawodzić łączność dodawania!
(sumach nieskończonych)

③ szereg harmoniczny.

Wykazaliśmy dawno temu, że $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$.
Ten wynik to nic innego jak dowód, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, zwany harmonicznym, jest rozbieżny do $+\infty$.
Dla przypomnienia udowodnimy tę rozbieżność raz jeszcze, korzystając z poniższego narzędzia:

Tw: (warunek Cauchy'ego dla szeregów)
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\cancel{\forall_{a\in I}} \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n>n_0} \ \forall_{k\in\mathbb{N}} \ \left|\sum_{l=n+1}^{n+k} a_l\right| < \varepsilon$$

Dowód: To twierdzenie to po prostu warunek Cauchy'ego zapisany dla ciągu sumy częściowych:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n,m>n_0} \quad |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Ustalmy bez straty ogólności, że $m>n$ i niech $k=m-n$. Wtedy

$$\varepsilon > |S_m - S_n| = |S_{n+k} - S_n| = \left|\sum_{l=1}^{n+k} a_l - \sum_{l=1}^{n} a_l\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=n+1}^{k+l} a_l\right| \quad \square$$

Sprawdzimy, że szereg harmoniczny nie spełnia warunku Cauchy'ego:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

liczba składników

najmniejszy składnik

i oszacowanie to zachodzi nawet dla bardzo dużych n,... więc $|S_{2n} - S_n|$ nie może być $<\varepsilon$ dla $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Tw. (warunek konieczny zbieżności szeregu).
Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dowód: ~~$a_n = S$~~ Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Wtedy
$a_n = S_n - S_{n-1}$, więc $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Szereg harmoniczny jest przykładem, że warunek konieczny nie jest warunkiem dostatecznym: mimo, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Wykażemy, że szereg ten jest zbieżny.

$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, więc ciąg sum częściowych jest rosnący, a zatem na pewno ma granicę. Żeby wykazać, że jest ona skończona, wystarczy wskazać ograniczenie górne ciągu (S_n).

$$S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2-\frac{1}{n} < 2.$$

⑤ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ nazywany szeregiem anharmonicznym.

Jest on zbieżny, obliczymy nawet jego sumę!

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=(*)$$

<u>Przypomnienie</u>: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+r_n$, gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$, γ - stała Eulera-Mascheroniego.

$$(*)=\ln 2n+\gamma+r_{2n}-\ln n-\gamma-r_n=\ln 2+\underbrace{(r_{2n}-r_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2$$

czyli $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\ln 2$.

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}=S_{2n}+\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2+0=\ln 2$$

i z tw. o scaleniu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\ln 2$.

Z twierdzeń o własnościach arytmetycznych granicy wynikają natychmiast własności

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

o ile tylko szeregi po prawej stronie równości mają sumy i nie otrzymujemy któregoś z wyrażeń nieoznaczonych: $0 \cdot \infty$, ~~$\infty - \infty$, $-\infty + \infty$~~ $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$.

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ nazywamy (nawet, gdy wszystkie szeregi są rozbieżne) sumą szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

<u>Uwaga</u>: Suma szeregu zbieżnego i rozbieżnego jest rozbieżna; suma 2. szeregów rozbieżnych może być zbieżna:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n + \frac{1}{n^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-n)}_{\text{rozbieżne}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{zbieżny}}$$

<u>Uwaga</u>: Zamiast rozważać szeregi, w których sumujemy od $n=1$ możemy rozpoczynać sumowanie od dowolnej liczby całkowitej; nie ma to wpływu na zbieżność szeregu (choć ma na wartość sumy):

<u>Tw.</u> Szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ są ~~oba~~ albo oba równocześnie zbieżne, albo oba rozbieżne.

<u>Dowód</u>: Gdy wypiszemy warunek Cauchy'ego dla obu tych szeregów, z założeniem, że $n_0 > \max(k_0, 1)$, to będzie on dla obu tych szeregów identyczny.

Twierdzenie (o porównywaniu sum szeregów)
Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mają sumy (być może nieskończone).
Jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \le b_n$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Jeżeli dodatkowo $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \text{ i}}_{\sum_{n=1}^{\infty} b_n > -\infty}$ dla pewnego $m\in\mathbb{N}$ $a_m < b_m$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód Oznaczmy przez (A_n) i (B_n) ciągi sum częściowych szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Z nierówności $\forall_n\ a_n \le b_n$ wynika oczywiście, że $\forall_n\ A_n \le B_n$; korzystając z tw o szacowaniu przechodzimy z n do ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n \le \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego m $a_m < b_m$.
Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$. Ma on wszystkie wyrazy nieujemne, a m-ty wyraz - dodatni, więc jego ciąg sum częściowych $C_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ ma wszystkie wyrazy począwszy od m-tego dodatnie, jest on przy tym niemalejący - a więc granica $\lim_{n\to\infty} C_n = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$ ma dodatnią (być może $+\infty$)
Z drugiej strony $0 < \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
(bo dzięki założeniom wykluczyliśmy $\infty - \infty$ oraz $-\infty - (-\infty)$)
skąd $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Wniosek: Kryterium porównawcze

Załóżmy, że dddn (tj. dla $n > n_0$) zachodzą nierówności $0 \leq a_n \leq b_n$.

Wówczas

(•) ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(••) z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(innymi słowy, (•) jeżeli $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ też
(••) jeżeli $\sum a_n$ jest rozbieżny, to $\sum b_n$ też).

Uwaga: Szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ mają, dddn, wyrazy nieujemne — i tylko do takich szeregów wolno nam używać kryterium porównawczego!

Od tej chwili do odwołania zajmować się będziemy

SZEREGami O WYRAZACH NIEUJEMNYCH.

(przynajmniej dddn)

Dlaczego?

Bo jeżeli szereg $\sum a_n$ ma, dddn, wyrazy nieujemne, to jego ciąg sum częściowych (S_n) jest (znów dddn) niemalejący, a więc ma granicę — czyli szereg ma sumę. Tak więc szereg o wyrazach nieujemnych albo jest zbieżny, albo jest rozbieżny do $+\infty$.

Dowód kryterium porównawczego

Z powyższej uwagi wiemy, że szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ mają sumy. Pozostaje wykazać, że jeżeli $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest $< \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$ też.

Z twierdzenia o porównywaniu sum szeregów

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n < \infty$$

a więc szereg $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (bo na pewno ma sumę, a z pow. nierówności musi ona być skończona)

Jeżeli jednak $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też.

jeżeli komuś przeszkadza, że stosujemy tw. o porównywaniu sum do szeregów, które sumujemy od n_0+1, a nie od 1, to może je zastosować do $\sum \tilde{a}_n$ i $\sum \tilde{b}_n$, gdzie $\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n & n>n_0 \\ 0 & 1\leq n\leq n_0 \end{cases}$ i $\tilde{b}_n = \begin{cases} b_n & n>n_0 \\ 0 & 1\leq n\leq n_0 \end{cases}$

Analogicznie, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ też, zatem $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = +\infty$, a z tw. o porównywaniu sum szeregów mamy

$$+\infty = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n, \text{ więc } \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = +\infty, \text{ czyli}$$

szereg $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny. $\square$

Ciąg dalszy uwag o szeregach o wyrazach nieujemnych:
Dla tych szeregów możemy pisać $\sum a_n < \infty$ i oznacza to, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Asymptotyczne kryterium porównawcze

Załóżmy, że ddd n $(n>n_0)$ $a_n > 0$ i $b_n > 0$ (a więc szeregi mają wyrazy dodatnie) oraz że istnieje skończona i dodatnia granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.
Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum b_n$.

Dowód: Ustalmy $c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $0 < c < g < d$.
Wiemy, że istnieje $n_1 > n_0$ takie, że $\forall_{n>n_1}\ c < \frac{a_n}{b_n} < d$, a więc dla $n > n_1$ $c\cdot b_n < a_n < d\cdot b_n$.

Zauważmy teraz, że szereg $\sum b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi $\sum cb_n$ oraz $\sum db_n$ — wynika to wprost z tw. o własnościach arytmetycznych sumy szeregu ($\sum cb_n = c\sum b_n$).

Jeżeli teraz $\sum a_n$ jest zbieżny, to z nierówności $\forall_{n>n_1}\ cb_n < a_n$ i kryt. porównawczego, (•), wynika zbieżność szeregu $\sum cb_n$, a więc i szeregu $\sum b_n$.

Jeżeli $\sum a_n$ jest rozbieżny, to z nier. $\forall_{n>n_1}\ a_n < db_n$ oraz z (••) kryt. porównawczego wynika rozbieżność $\sum db_n$, a więc i $\sum b_n$. □.

Przykład zastosowania asymptotycznego kryt. porównawczego:

1. szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ jest rozbieżny, bo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}} = 1$$

porównujemy szereg $\sum\frac{1}{n+\ln n}$ z szeregiem $\sum\frac{1}{n}$, o którym wiemy, że jest rozbieżny

A więc szereg $\sum\frac{1}{n+\ln n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\frac{1}{n}$ jest zbieżny (a ten ostatni zbieżny nie jest).

2. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ jest, $\forall_{k\in\mathbb{N}}$, zbieżny, o ile

i rozbieżny gdy $q \geq 1$

Kryterium porównawcze drugiego rodzaju

Załóżmy, że dla n ($n > n_0$) mamy $a_n, b_n > 0$ oraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Kryteriami „drugiego rodzaju" nazywamy kryteria, w których o zbieżności lub rozbieżności szeregu wnioskujemy z zachowania ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Wówczas

(·) jeżeli $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ też

(··) jeżeli $\sum a_n$ jest rozbieżny, to $\sum b_n$ też

Dowód

Niech $m > n_0$. Mamy

$$a_m = \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot a_{n_0+1} \le \frac{b_m}{b_{m-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \cdot a_{n_0+1} =$$

$$= b_m \cdot \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}}$$

Oznaczmy $c = \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} > 0$, mamy więc $\forall_{m > n_0}$

$$a_m \le c \cdot b_m$$

(·): ze zbieżności $\sum b_m$ wynika zbieżność $\sum c b_m$, a stąd, z kryt. porównawczego, zbieżność $\sum a_m$.

(··): z rozbieżności $\sum a_m$ wynika, z kryt. porównawczego, rozbieżność $\sum c b_m$, równoważna rozbieżności $\sum b_m$. □.

Zastosowanie

Wykażemy, że $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ ~~zbieżny~~ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ jest zbieżny dla $q \in (0,1)$ i rozbieżny dla $q \ge 1$.

Niech $q \in (0,1)$ i niech $s \in (q,1)$. Porównamy nasz szereg z $\sum b_n$ dla $b_n = s^n$.

$$\frac{(n+1)^k q^{n+1}}{n^k q^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot q \text{ . Wiemy, że } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k q = 1 \cdot q = q,$$

więc istnieje n_0 t.ż. $\forall_{n>n_0} \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^k q \le s = \frac{s^{n+1}}{s^n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$,

a więc oznaczając $a_n = n^k q^n$ mamy

dla $n>n_0$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, przy czym wiemy, że szereg $\sum b_n$ jest zbieżny ($|s|<1$),

więc z kryt. porówn. IIgo rodzaju $\sum a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $q \ge 1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n n^k = +\infty$, szereg nie spełnia zatem ~~po~~ warunku koniecznego zbieżności szeregu ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

__Uwaga__: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ umiemy zsumować!

Spróbujmy dla $k=1$: $\sum_{n=1} n q^n = \frac{1-q}{1-q} \sum_{n=1} n q^n =$

$$= \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} n q^n (1-q) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n q^n - \sum_{n=1} n q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n q^n -\right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1) q^{n+1} - q^{n+1}\right]\right) = \frac{1}{1-q}\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n q^n}_{q+2q^2+3q^3+\dots} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1) q^{n+1}}_{2q^2+3q^3+\dots} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q^{n+1}}_{q^2+q^3+\dots}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(q + \frac{q^2}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{q(1-q)+q^2}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Dla $k=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{1-q}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 q^n - n^2 q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2 q^{n+1} - 2n q^{n+1} - q^{n+1}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 q^{n+1} + 2q\sum_{n=1}^{\infty} n q^n + q\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right) = \dots$$

dalej Państwu zostawiam.

Kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu

Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich i niech $\forall_n\ b_n = 2^n a_{2^n}$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód: Oba ciągi sum częściowych $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ są rosnące – ~~więc~~ żeby pokazać ich zbieżność wystarczy wykazać, że są ograniczone z góry.

$$2a_2 = b_1 \qquad 2^k a_{2^k} = b_k \qquad 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = b_{n-1}$$

$$A_{2^n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}} + \ldots + a_{2^n}$$

$$\underbrace{a_1 + a_2}_{\geq a_2 = \frac{1}{2}b_1} \quad \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4 = \frac{1}{2}b_2} \quad \underbrace{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}_{\geq 2^k a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2}b_{k+1}} \quad \underbrace{\ldots + a_{2^n}}_{\geq \frac{1}{2}b_n}$$

$A_{2^n} \overset{①}{\geq} \frac{1}{2} B_n$ (z oszacowań na dole) i $a_1 + a_2 + B_{n-1} \overset{②}{\geq} A_{2^n}$ (na górze).

Jeżeli teraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to ciąg (A_n) jest ograniczony z góry, a więc z ① mamy, że i (B_n) jest ograniczony z góry (a więc zbieżny). Analogicznie, jeżeli $\sum a_n$ jest rozbieżny, czyli (A_n) nie jest ograniczony z góry, to

$$B_n \overset{z②}{\geq} A_{2^{n+1}} - a_1 - a_2 \quad \text{też nie jest ograniczony z góry.}$$

(bo (A_n) rosnący, czyli $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$). □.

Przykłady zastosowania

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n^s}$ dla $s > 0$.
(dla $s \leq 0$ szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).

Oczywiście $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem malejącym liczb dodatnich, możemy więc zastosować kryterium zagęszczeniowe:

$$a_n = \frac{1}{n^s} \qquad b_n = 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \frac{1}{2^{n(s-1)}} = \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n.$$

Kiedy zbieżny jest szereg $\sum b_n$? jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2^{s-1}} > 0$, jest więc zbieżny $\Leftrightarrow q < 1$.

$$\frac{1}{2^{s-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{s-1} > 1 = 2^0 \Leftrightarrow s-1 > 0 \Leftrightarrow s > 1$$

Tak więc szereg $\sum \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny gdy $s>1$ i rozbieżny dla $s \leq 1$.

Inny przykład: szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny:

$\frac{1}{n \ln n}$ jest ciągiem malejącym; $b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n)} =$

$$= \frac{1}{n \ln 2}.$$

Mamy jednak $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \infty = +\infty$.

Uwaga: W kryterium o zagęszczaniu możemy zamiast 2^n użyć k^n dla dowolnej $k \in \mathbb{N}, k > 1$: szereg $\sum a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \sum k^n a_{k^n}$ jest zbieżny.

Dowód – wystarczy „przerobić" wszystkie 2^n na k^n w dowodzie – proste ćwiczenie.

Dwa proste, ale często wystarczające kryteria zbieżności szeregów:

Kryterium ilorazowe d'Alemberta

(kryterium IIgo rodzaju)

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) encyklopedysta, fizyk, matematyk i filozof francuski.

Jeżeli $\forall_{n>n_0}\ a_n>0$ i istnieje $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g$,

to (•) jeżeli $g<1$, to $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny

(••) jeżeli $g>1$, to $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny

Gdy $g=1$ lub granica nie istnieje, kryterium nie rozstrzyga zbieżności $\sum a_n$.

Dowód: wprost z kryterium porównawczego IIgo rodzaju:

(•): jeżeli $g<1$, to niech $s\in(g,1)$.

$\exists_{n_1>n_0}\ \forall_{n>n_1}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < s=\frac{s^{n+1}}{s^n}$, kładąc więc $b_n=s^n$

mamy $\forall_{n>n_1}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$, przy czym szereg $\sum b_n$ jest zbieżny,

a więc (kryt. porówn. IIgo rodzaju) $\sum a_n$ też jest zbieżny

(••): jeżeli $g>1$, to niech $s\in(1,g)$;

$\exists_{n_1>n_0}\ \forall_{n>n_1}\ \frac{s^{n+1}}{s^n}=s<\frac{a_{n+1}}{a_n}$ i jak poprzednio,

z rozbieżności $\sum b_n=\sum s^n$ wnioskujemy o rozbieżności $\sum a_n$.

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

(kryterium Igo rodzaju).

Jeżeli $\forall_{n>n_0}\ a_n\geq 0$ i istnieje $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=g$, to

(•) jeżeli $g<1$, to $\sum a_n$ jest zbieżny

(••) jeżeli $g>1$, to $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Przykłady, gdy kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego nie rozstrzygają o zbieżności lub rozbieżności szeregu:

Zbadajmy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – rozbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

d'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/_{n+1}}{1/_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Cauchy:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Dowód kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $0 \le g = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, to niech $s \in (g, 1)$.

$\exists_{n_1 > n_0} \forall_{n > n_1} \sqrt[n]{a_n} < s \iff \cancel{\sqrt[n]{a_n}}\ a_n < s^n$

szereg $\sum s^n$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego $\sum a_n$ też jest zbieżny.

Jeżeli $g > 1$, to bierzemy $s \in (1, g)$

$\exists_{n_1 > n_0} \forall_{n > n_1} \sqrt[n]{a_n} > s \iff a_n > s^n$

i z rozbieżności szeregu $\sum s^n$ wnioskujemy o rozbieżności $\sum a_n$.

Uwaga: Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze od kryterium d'Alemberta w tym sensie, że jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g$, to $\sqrt[n]{a_n}$ dąży do tego samego g (a więc jeżeli kryt. d'Alemberta rozstrzyga o zbieżności $\sum a_n$, $(g \geq 0,\ g \neq 1)$, to tę samą odpowiedź da nam kryterium Cauchy'ego. Istnieją natomiast szeregi, o wyr. dodatnich dla których kryt. Cauchy'ego rozstrzyga o zbieżności, a kryt. d'Alemberta nie.

Dowód: Załóżmy, że dla $n > n_0$ $a_n > 0$ oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \geq 0$. ~~Wówczas~~ $\cancel{\lim \sqrt[n]{a_n} = g}$.

Wykażemy, że wówczas $\lim \sqrt[n]{a_n} = g$.

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{n_1 > n_0}\ \forall_{n > n_1}\ \cancel{\max(g-\varepsilon, 0)}\quad g - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon$$

Może się zdarzyć, że $g - \varepsilon < 0$, a $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest zawsze dodatnie, możemy więc nierówność poprawić:

$$\forall_{n > n_1}\quad \max(g-\varepsilon, 0) < \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon.$$

$$\forall_{m > n_1}\quad a_m = \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} \cdot a_{n_1+1} < (g+\varepsilon)^{m-(n_1-1)} a_{n_1+1}$$

$$\vee$$

$$L = (\max(g-\varepsilon, 0))^{m-(n_1-1)} a_{n_1+1}, \quad \text{skąd}$$

$$? < \sqrt[m]{a_m} < (g+\varepsilon) \cdot \sqrt[m]{\frac{a_{n_1+1}}{(g+\varepsilon)^{n_1-1}}}$$

Jeżeli $g - \varepsilon \leq 0$, to $\max(g-\varepsilon, 0) = 0$ i $L = 0$, więc w miejsce ? możemy napisać $0 = \sqrt[m]{0}$.

Jeżeli $g - \varepsilon > 0$, to $\max(g-\varepsilon, 0) = g - \varepsilon$ i $? = \sqrt[m]{L} = (g-\varepsilon)\sqrt[m]{\frac{a_{n_1+1}}{(g-\varepsilon)^{n_1-1}}}$

Zarówno $\sqrt[m]{\frac{a_{n_1+1}}{(g+\varepsilon)^{n_1-1}}}$, jak i $\sqrt[m]{\frac{a_{n_1+1}}{(g-\varepsilon)^{n_1+1}}}$ dążą
(o ile $g-\varepsilon>0$)
przy $n\to\infty$ do 1,
a więc $\exists_{m_0>n_1}\ \forall_{m>m_0}$

$$\underset{\substack{\vee \\ g-2\varepsilon}}{\max(0,\ g-2\varepsilon)} < \sqrt[m]{a_m} < g+2\varepsilon, \text{ zatem } \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{a_m}=g.$$

Przyjrzyjmy się jednak szeregowi
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Jest on zbieżny, umiemy nawet go wysumować:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}}=$$
$$=2-\frac{2}{6}=1\tfrac{2}{3}.$$

Cauchy: $\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\to ?$

$$\frac{1}{2}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}\leq\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\leq\sqrt[n]{\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{3}\to\frac{1}{2}$$

i z tw. o 3 ciągach $g=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ szereg jest zbieżny.

d'Alembert: $\dfrac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\to ?$

Zbadajmy oddzielnie $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ i $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$.

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{3}{2^{2n}}}=\frac{1}{6}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6}\qquad\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\frac{\frac{3}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-1}}}=\frac{3}{2}\to\frac{3}{2}$$

zatem granica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje!