Lemat Stolza

Poniższe twierdzenie, zwane twierdzeniem bądź lematem Stolza(*), pomaga nam radzić sobie z ciągami w postaci ilorazu $\frac{a_n}{b_n}$, w których, stosując tw. o własnościach arytmetycznych, dostajemy wyrażenie nieokreślone $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

(*) po angielsku również: Stolz-Cesàro theorem

Otto Stolz (1842–1905) – matematyk austriacki, uczeń Weierstrassa, Kroneckera i Kummera i Kleina, następnie profesor uniwersytetu w Innsbrucku.

O Ernesto Cesàro (1859–1906) – przy innej okazji.

Twierdzenie: Załóżmy, że ciąg (b_n) jest, począwszy od pewnego n_0, ściśle monotoniczny; istnieje granica (być może nieskończona) ciągu $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$ i spełniony jest jeden z warunków:

(•) ciąg (b_n) ma granicę nieskończoną

lub (••) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Wówczas ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ma granicę i $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

Przykłady zastosowania: ① $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \ln 1 = 0$

i stąd $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \exp(0) = 1$

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!} = ?$ $\sqrt[n^2]{n!} = \exp\left(\frac{\ln(n!)}{n^2}\right)$, wystarczy więc znaleźć $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^2} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{2n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n+1}{2n+1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

skąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(n!)}{n^2}\right) = \exp(0) = 1$.

<u>Dowód</u>: Możemy założyć, że (b_n) jest, dla $n > n_0$, ciągiem rosnącym ($\frac{a_n}{b_n} = \frac{-a_n}{-b_n}$, w razie gdyby (b_n) był malejący, zastępujemy (a_n) przez $(-a_n)$ i (b_n) przez $(-b_n)$). Możemy też założyć, że dla $n > n_1 \geq n_0$ $b_n \neq 0$ (ciąg rosnący może przyjąć wartość 0 co najwyżej raz).

Rozważmy najpierw przypadek, gdy g jest skończona.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_2 > n_1} \ \forall_{n > n_2} \quad g - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq g + \varepsilon$$

mianownik jest dodatni, bo (b_n) jest rosnący

cyli

$$(g-\varepsilon)(b_{n+1} - b_n) \leq a_{n+1} - a_n \leq (g+\varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

i analogicznie

$$(g-\varepsilon)(b_{n+2} - b_{n+1}) \leq a_{n+2} - a_{n+1} \leq (g+\varepsilon)(b_{n+2} - b_{n+1})$$

$$(g-\varepsilon)(b_{n+3} - b_{n+2}) \leq a_{n+3} - a_{n+2} \leq (g+\varepsilon)(b_{n+3} - b_{n+2})$$

$$\vdots$$

$$(g-\varepsilon)(b_{n+k} - b_{n+k-1}) \leq a_{n+k} - a_{n+k-1} \leq (g+\varepsilon)(b_{n+k} - b_{n+k-1})$$

dodajemy stronami

$$(*) \qquad (g-\varepsilon)(b_{n+k} - b_n) \leq a_{n+k} - a_n \leq (g+\varepsilon)(b_{n+k} - b_n)$$

Jeżeli teraz zachodzi warunek (●●), cyli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to w $(*)$ możemy przejść z k do ∞:

$$(g-\varepsilon)(-b_n) \leq -a_n \leq (g+\varepsilon)(-b_n)$$

Ciąg (b_n) jest rosnący i dąży do 0, więc $b_n < 0$; cyli $-b_n > 0$.

$$g-\varepsilon \le \frac{-a_n}{-b_n} = \frac{a_n}{b_n} \le g+\varepsilon$$

o ile tylko $n>n_2$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=g$.

Jeżeli zachodzi (•), czyli $b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ ($-\infty$ wykluczona, bo (b_n) rosnący), jest trochę trudniej.

Dddk $b_{n+k}>0$ (bo $b_{n+k}\xrightarrow{k\to\infty}+\infty$).

Dzielimy (*) stronami przez b_{n+k}, dddk.

$$(g-\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) \le \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}} \le (g+\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$L_k = (g-\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}} \le \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \le (g+\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}} = P_k$$

$$\lim_{k\to\infty} L_k = \left\{(g-\varepsilon)\Big(1-\underbrace{\frac{b_n}{+\infty}}_{=0}\Big) + \underbrace{\frac{a_n}{+\infty}}_{=0}\right\} = g-\varepsilon,$$

analogicznie

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = g+\varepsilon$. Stąd ~~dla $k>k$~~

$$\exists_{k_1}\ \forall_{k>k_1}\quad L_k > g-2\varepsilon,\quad P_k < g+2\varepsilon$$

stąd dla $n>n_2$ i $k>k_1$

$$g-2\varepsilon < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < g+2\varepsilon,$$ czyli dla $m>n_2+k_1$

$$g-2\varepsilon < \frac{a_m}{b_m} < g+2\varepsilon,$$ zatem $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m}=g$.

Teraz przypadek, gdy $g = +\infty$: ($g = -\infty$ dowodzi się analogicznie, zostawię Państwu jako ćwiczenie).

$$\forall_{M} \exists_{n_M > n_1} \forall_{n > n_M} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq M$$

czyli

$$a_{n+1} - a_n \geq M(b_{n+1} - b_n)$$
$$a_{n+2} - a_n \geq M(b_{n+2} - b_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$a_{n+k} - a_{n+k-1} \geq M(b_{n+k} - b_{n+k-1})$$

dodajemy stronami

$$a_{n+k} - a_n \geq M(b_{n+k} - b_n)$$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to przechodzimy z k do ∞:

$$-a_n \geq M(-b_n)$$

jak poprzednio, $b_n < 0$, więc $-b_n > 0$ i

dla $n > n_M$ $\quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{-a_n}{-b_n} \geq M$, zatem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to dzielimy obie strony przez b_{n+k}

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}} \geq M\left(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\right)$$

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq M\left(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\right) + \frac{a_n}{b_{n+k}} = P_k$$

$\lim_{k\to\infty} P_k = M$, więc $\exists_{k_1} \forall_{k > k_1} P_k > M - 1$. Zatem dla $m > n_M + k_1$

$$\frac{a_m}{b_m} > M - 1, \text{ czyli } \lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = +\infty.$$

Stała Eulera-Mascheroniego

Leonhard Euler (1707-1783) - jeden z najwspanialszych matematyków w historii. Uczeń Jana Bernoulliego, ur. w Bazylei pracował w Petersburgu, Berlinie i ponownie w Petersburgu, gdzie zmarł. Autor kilkuset prac z bardzo różnych dziedzin matematyki, od logiki i teorii grafów po mechanikę teoretyczną.

Lorenzo Mascheroni (1750-1800) - matematyk włoski, profesor uniwersytetu w Pawii. Pamiętamy za 2 wyniki - pierwszy to dowód, że wszystkie konstrukcje wykonane za pomocą cyrkla i linijki można uzyskać przy pomocy samego cyrkla (125 lat przed nim udowodnił to, zupełnie innymi metodami, duński matematyk Georg Mohr, jego wynik jednak został zapomniany). Drugi to obliczenie s. E.-M. z dokładnością do 19 miejsc po przecinku (M. podał aż 32 miejsca, ale przy 20-tym się pomylił w rachunkach i dalsze są niepoprawne).

Proste zadanie z tematu Stolza:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1, \quad \text{bo} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}\overset{S}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}}_{\to 1}}=1$$

czyli dla dużych n

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n.$$

Ale jak duży jest błąd tego przybliżenia? Czy rośnie, czy maleje wraz z n?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2}=1, \quad \text{ale} \quad (n^2+n)-n^2=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

Stała ta pojawia się w teorii liczb, analizie zespolonej, równaniach różniczkowych, kwantowej teorii pola etc. Nie wiadomo, czy γ jest liczbą wymierną!

Przykład, że z twierdzenia Stolza nie można wprost wnioskować o nieistnieniu granicy $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$:

Wskażemy takie ciągi (a_n) i (b_n), że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ istnieje; ciąg (b_n) jest ściśle rosnący i dąży do ∞, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ nie istnieje:

Niech
$$a_n = n^2 + (-1)^n \cdot n$$
$$b_n = n^2$$

Oczywiście
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\downarrow\, 0}\Big) = 1,$$
ciąg (b_n) rośnie do ∞. Mamy jednak
$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (-1)^{n+1}(n+1) - n^2 - (-1)^n n =$$
$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 + (-1)^n(-n-1) - \cancel{n^2} - (-1)^n n =$$
$$= 2n+1 + (-1)^n(-2n-1) = (2n+1)(1-(-1)^n)$$
$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$
i
$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(2n+1)(1-(-1)^n)}{2n+1} = 1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ parzyste} \\ 2 & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

nie ma granicy...