Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa)
Z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848) - czeski matematyk, logik, teolog, ksiądz katolicki, pacyfista.

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) wielki niemiecki matematyk, ojciec współczesnej analizy matematycznej.

Dowód 1 (Bolzano)
Skoro ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, to istnieje przedział $[\alpha_1, \beta_1]$ taki, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Pierwszy wyraz (a_{n_1}) mojego podciągu będzie dowolny (a więc jako n_1 wybieram dowolną liczbę naturalną), oczywiście $a_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Dzielę przedział $[\alpha_1, \beta_1]$ na 2 połowy: $[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]$ i $[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$.
Przynajmniej w jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n); oznaczam jej końce przez $[\alpha_2, \beta_2]$ (a więc $\alpha_2 = \alpha_1$ lub $\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ lub $\beta_2 = \beta_1$).
Jeżeli w obu połowach jest niesk. wiele wyrazów ciągu (a_n), to wybieram którąkolwiek.

W $[\alpha_2, \beta_2]$ jest niesk. wiele wyrazów ciągu (a_n), więc znajdę wśród nich wyraz o indeksie n_2 większym niż n_1.
Oczywiście $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$

Dzielę $[\alpha_2, \beta_2]$ na 2 połowy... ; znajduję $[\alpha_3, \beta_3]$ i wyraz $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$, $n_3 > n_2$. itd.

W ten sposób indukcyjnie konstruuję ciągi (α_n), (β_n) i podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, spełniające

(•) $\forall_k \ \alpha_k \le a_{n_k} \le \beta_k$

(••) $\beta_k - \alpha_k = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}}$

(•••) ciąg (α_k) ~~i $(\beta$~~ jest niemalejący i ograniczony z góry (np. przez β_1), a ciąg (β_k) – nierosnący i ograniczony z dołu (przez α_1).

Z (•••) ciągi (α_k) i (β_k) są zbieżne; $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta$.

Z (••) $\underbrace{\lim(\beta_k - \alpha_k)}_{\beta-\alpha} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} = 0$, a więc $\alpha = \beta$.

Z (•) i tw. o 3 ciągach $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k$ (w szczególności podciąg (a_{n_k}) jest zbieżny).

<u>Współczesny dowód:</u> Jak poprzednio, wiemy, że ciąg (a_n) jest ograniczony, więc $\exists_{\alpha<\beta} \forall_{n\in\mathbb{N}} \ a_n \in [\alpha, \beta]$.

Niech $A = \{x \in [\alpha-1, \beta+1]$: tylko skończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od $x\}$.

Zbiór A jest

① niepusty, bo $\alpha \in A$ (zbiór wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od α jest pusty)

② ograniczony (bo zawarty w $[\alpha-1, \beta+1]$)

a więc ma kres górny. Oznaczmy go przez g.

Z własności supremum, dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba $g+\frac{1}{k}$ nie należy do A, natomiast liczba $g-\frac{1}{k}$ należy (to ostatnie wymaga chwili zastanowienia – z własn. supremum mamy, że $g-\frac{1}{k}$ nie jest ogr. górnym A, a więc $\exists_{x\in A}: g-\frac{1}{k}<x$. No, ale wówczas tylko skończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest $<x$, a więc tym bardziej skończenie wiele jest $< g-\frac{1}{k}$, czyli $g-\frac{1}{k}\in A$).

Stąd w przedziale $[g-\frac{1}{k}, g+\frac{1}{k}]$ jest, dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$, nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n).

Wybieramy n_1 tak, by $a_{n_1}\in[g-1, g+1]$

n_2 tak, by $n_2>n_1$ i $a_{n_2}\in[g-\frac{1}{2}, g+\frac{1}{2}]$

n_3 tak, by $n_3>n_2$ i $a_{n_3}\in[g-\frac{1}{3}, g+\frac{1}{3}]$ itd...

$$g-\frac{1}{k}\le a_{n_k}\le g+\frac{1}{k}$$

więc z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=g$. $\square$

Jest jeszcze trzeci, przyjemny dowód twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, korzystający z tzw. Lematu Sierpińskiego

<u>Lemat Sierpińskiego</u>:

Z każdego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych można wybrać podciąg monotoniczny.

<u>Dowód</u>: Rozważmy zbiory $A_n=\{a_k : k>n\}$.

Mamy 2 możliwości:

① albo każdy ze zbiorów A_n ma element największy

② albo istnieje $m\in\mathbb{N}$ takie, że A_m nie ma elementu największego.

(1) Niech $a_{n_1} = \max A_1$

$$a_{n_2} = \max A_{n_1}$$
$$a_{n_3} = \max A_{n_2}$$
$$\vdots$$
$$a_{n_{k+1}} = \max A_{n_k}$$
$$\vdots$$

Zauważmy, że $n_{k+1} > n_k$, bo w A_{n_k} są wyrazy ciągu o indeksach <u>większych</u> od n_k, (a_{n_k}) jest więc podciągiem ciągu (a_n).

Zauważmy też, że $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ $A_{n_{k+1}} \subset A_{n_k}$, więc

$$a_{n_{k+2}} = \max A_{n_{k+1}} \leq \max A_{n_k} = a_{n_{k+1}}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że podciąg (a_{n_k}) jest nierosnący.

(2). Zbiór A_m, dla pewnego m, nie ma elementu największego. Weźmy, jako a_{n_1}, dowolny element A_m.

W zbiorze A_m jest nieskończenie wiele elementów ~~większych~~ nie mniejszych niż a_{n_1} (bo gdyby było ich tylko skończenie wiele, to największy z nich byłby największy w A_m), w szczególności jest w A_m element a_{n_2} taki, że $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ oraz $n_2 > n_1$.

W zbiorze A_m jest niesk. wiele elementów ~~większych~~ nie mniejszych niż a_{n_2} .... znajdujemy $a_{n_3} \geq a_{n_2}$, taki, że $n_3 > n_2$ itd, konstruujemy ciąg niemalejący (a_{n_k}), który oczywiście jest podciągiem (a_n).

Gdy mamy Lemat Sierpińskiego, dowód tw. B.-W. jest natychmiastowy:
Niech ciąg (a_n) będzie ograniczony. Wybieramy z niego, na mocy Lematu Sierpińskiego, podciąg monotoniczny. Jest on ograniczony (z góry i ~~ze~~ z dołu), bo cały ciąg jest ograniczony, a więc (monotoniczny + ograniczony) jest zbieżny. $\square$.

Wacław Franciszek Sierpiński (1882 - 21.X.1969)
jeden z najwybitniejszych polskich matematyków,
profesor naszego wydziału.

~~Nieznacznie modyfikując dowód lematu Si~~

Dowiedliśmy 2 wykłady temu, że jeżeli ciąg (a_n) ma 2 podciągi o różnych granicach, to (a_n) nie ma granicy (skończonej ani nieskończonej).

Teraz wykażemy twierdzenie odwrotne: Jeżeli ciąg (a_n) nie ma granicy, to ma 2 podciągi (a_{n_k}), (a_{m_k}) mające różne granice.

Nim je udowodnimy, zauważmy, że zachodzi następujące

Twierdzonko: Jeżeli ciąg (a_n) jest nieograniczony z góry, to istnieje podciąg (a_{n_k}) rozbieżny do $+\infty$.
Analogicznie, jeżeli (a_n) jest nieograniczony z dołu, to istnieje podciąg (a_{n_k}) rozbieżny do $-\infty$.
Dowód twierdzonka: (tylko dla ciągu nieogr. z góry).
~~N.~~ Wyraz a_{n_1} wybieramy dowolnie.
W ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele wyrazów większych niż $a_{n_1}+1$ (bo gdyby było ich sk. wiele, to największy z nich byłby ogr. górnym dla (a_n), a gdyby nie było ich

wcale, to $a_{n_1}+1$ byłby ogr. górnym ciągu (a_n)).
Możemy spośród nich wybrać wyraz o indeksie
większym niż n_1, ozn. a_{n_2}.
Powtarzamy ten krok dla a_{n_2} w miejsce a_{n_1} itd.
Otrzymujemy podciąg (a_{n_k}) spełniający

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k} + 1$$

a więc indukcyjnie

$$a_{n_k} > a_{n_{k-1}} + 1 > a_{n_{k-2}} + 2 > \dots > a_{n_1} + (k-1)$$

$$a_{n_k} > a_{n_1} - 1 + k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

i z wersji tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

Dowód twierdzenia:

① Jeżeli ciąg (a_n) jest nieograniczony z góry, to ma (na mocy twierdzonka) podciąg (a_{n_k}) rozbieżny do $+\infty$. Ciąg (a_n) nie ma jednak granicy,
~~musi więc istnieć $M \in \mathbb{R}$~~
czyli

$$\sim \left(\forall_{M} \exists_{n_M} \forall_{n>n_M} a_n > M \right)$$

$$\iff \exists_{M} \forall_{n_M} \exists_{n>n_M} a_n < M$$

czyli istnieją wyrazy o dowolnie dużych indeksach, mniejsze od M; ustawiając je w kolejności rosnących indeksów dostajemy podciąg ciągu (a_n) ogr. z góry przez M.

Z tego podciągu możemy (lemat Sierpińskiego) wybrać podciąg monotoniczny, ogr. z góry przez M. Podciąg monotoniczny na pewno ma granicę, a skoro jest ogr. z góry, to nie może być ona równa $+\infty$.

② Niech (a_n) będzie nieograniczony z dołu. Wtedy ciąg $(-a_n)$ jest nieogr. z góry i stosując doń punkt ① dostajemy 2 podciągi o różnych granicach. Po usunięciu minusa dostaniemy z nich 2 podciągi ciągu (a_n) o różnych granicach.

③ Niech ciąg (a_n) będzie ograniczony; ma zatem (tw. B.-W.) podciąg zbieżny (a_{n_k}), $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Wiemy jednak, że

$$\sim \left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n - g| < \varepsilon \right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon_0>0} \forall_{n_{\varepsilon_0}} \exists_{n>n_{\varepsilon_0}} |a_n - g| \geq \varepsilon_0$$

czyli poza przedziałem $(g-\varepsilon_0, g+\varepsilon_0)$ jest niesk. wiele wyrazów ciągu (a_n). Możemy je ustawić w podciąg ciągu (a_n), a następnie wybrać zeń podciąg zbieżny (a_{m_k}), ale już nie do g, bo wszystkie wyrazy (a_{m_k}) są oddalone od g o co najmniej $\varepsilon_0 > 0$.

Wniosek: Ciąg (a_n) ma granicę (być może nieskończoną) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy.

Dowód: Jeżeli (a_n) ma granicę, to to, że jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy, udowodniliśmy już dawno temu. Pozostaje ~~prz~~ implikacja w drugą stronę: jeżeli wszystkie podciągi mają tę samą granicę, to ciąg ma granicę, ale to wynika natychmiast z poprzedniego twierdzenia: gdyby ciąg nie miał granicy, miałby 2 podciągi o różnej granicy. □

Jeszcze jedno twierdzenie o podciągach:

Twierdzenie (o scalaniu).
Załóżmy, że ciąg (a_n) ma k podciągów o następujących własnościach
① Wszystkie te podciągi są zbieżne do tej samej granicy g
② każdy wyraz ciągu należy do jednego z podciągów.
Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny do g.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla ~~każdego~~ m-tego podciągu możemy dobrać liczbę l_m taką, że jeżeli a_n należy do tego podciągu i $n > l_m$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.
~~Niech~~ W ten sposób dostajemy liczby $l_1, l_2, \ldots, l_k$
Niech $l_0 = \max(l_1, l_2, \ldots, l_k)$. Jeżeli teraz $n > l_0$, to a_n na pewno należy do jednego z podciągów, a więc spełnia nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

To twierdzenie jest również prawdziwe gdy $g = \pm\infty$; dowód jest trywialną modyfikacją powyższego, zostawiam go Państwu.

Przykład: Niech $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

$$a_{2n} = \frac{1}{n} \qquad a_{2n-1} = 0$$

Rozkładamy ciąg (a_n) na 2 podciągi: wyrazy o numerach parzystych i nieparzystych. Oczywiście każdy wyraz (a_n) należy do jednego z tych podciągów;

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 0.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Jeszcze ważne twierdzenie, dające warunek konieczny i dostateczny zbieżności ciągu.

Twierdzenie (warunek Cauchy'ego)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) wielki francuski matematyk, główny przed Weierstrassem kodyfikator analizy matematycznej.

Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek (w. Cauchy'ego):

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_\varepsilon} \ \forall_{m,n>n_\varepsilon} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Niech Państwo zauważą, że w warunku Cauchy'ego nie pojawia się nigdzie granica ciągu (a_n) – a więc twierdzenie to daje sposób na dowodzenie zbieżności ciągów, których granicy nie umiemy obliczyć. Mieliśmy już podobne twierdzenia; np. to, że ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, ale warunek

Cauchy'ego jest uniwersalny: Nie każdy ciąg zbieżny jest monotoniczny, ale każdy spełnia warunek Cauchy'ego.

<u>Dowód</u>: Łatwiejszy kierunek: jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to spełnia w. Cauchy'ego:
Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wtedy dla $n, m > n_\varepsilon$

$$|a_n - a_m| = |a_n - g + g - a_m| \overset{n.\Delta}{\leq} |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Trudniejszy kierunek: jeżeli ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, to jest zbieżny.

1. ciąg (a_n) jest ograniczony

Rzeczywiście, wypiszmy warunek Cauchy'ego dla $\varepsilon = 1$.

$$\exists_{n_1} \forall_{n,m>n_1} \quad |a_n - a_m| < 1$$

$$\Rightarrow \cancel{\forall_{m>n_1} a_{n_1} - 1 \leq a_m \leq a_{n_1} + 1}$$

weźmy $n = n_1 + 1$

$$\forall_{m>n_1} \quad a_{n_1+1} - 1 < a_m < a_{n_1+1} + 1$$

Niech teraz $\alpha = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1} - 1)$

$\beta = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1} + 1)$

Oczywiście $\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad \alpha \leq a_m \leq \beta$.

2. Wybierzmy zatem z (a_n) podciąg zbieżny (na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa)

$$a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} g.$$

Wykażemy, że g jest granicą ciągu (a_n).

Podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do g, czyli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_\varepsilon} \forall_{k>k_\varepsilon} \quad |a_{n_k}-g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

no i mamy warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n,m>n_\varepsilon} \quad |a_n-a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Chcemy oszacować $|a_n-g|$ dla dost. dużych n.
Niech $m_\varepsilon = \max(n_{k_\varepsilon}, n_\varepsilon)$ i niech $n > m_\varepsilon$.
Wybierzmy dowolne k takie, by $n_k > m_\varepsilon$.

$$|a_n-g| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \leq |a_n-a_{n_k}| + |a_{n_k}-g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

czyli $|a_n-g|<\varepsilon$, o ile tylko $n>m_\varepsilon$,
zatem $g = \lim_{n\to\infty} a_n$.