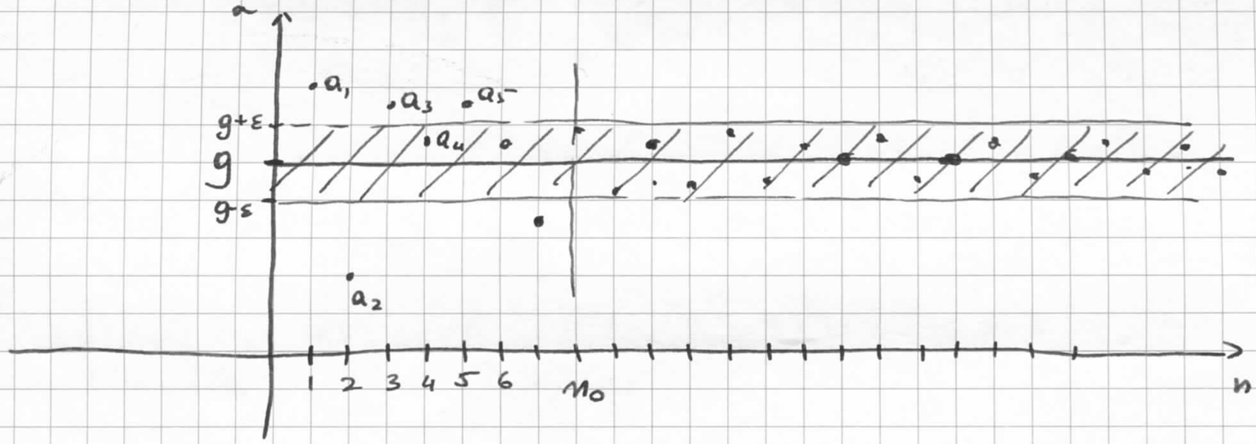
Ważna ilustracja pojęcia granicy



Jakkolwiek wąski pasek wokół g wybierzemy, zawsze znajdziemy taki numer n_0, że na prawo od niego wszystkie wyrazy ciągu leżą już w wybranym pasku.

Twierdzenie: Ciąg zbieżny jest ograniczony (zarówno z góry, jak i z dołu).

Dowód: Strategię dowodu łatwo zrozumieć patrząc na obrazek powyżej. Wszystkie wyrazy na prawo od n_0 są ograniczone — leżą między $g-\varepsilon$ a $g+\varepsilon$. Pozostałych wyrazów jest tylko skończenie wiele, a zbiór skończony jest zawsze ograniczony.
Dla ułatwienia możemy ustalić jakieś $\varepsilon>0$, np $\varepsilon=1$ i dobrać do niego z definicji granicy liczbę n_1.
Wtedy $\forall_{n\in\mathbb{N}}$

$$\min(a_1,a_2,\dots,a_{n_1},g-1)\le a_n\le\max(a_1,a_2,\dots,a_{n_1},g+1).$$

Twierdzenie: Ciąg niemalejący i ogr. z góry jest zbieżny. Podobnie, ciąg nierosnący i ogr. z dołu jest zbieżny.

Dowód: Dowody obu przypadków są niemal identyczne, więc udowodnię tylko pierwszą część twierdzenia: ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący i ograniczony z góry (przez liczbę M).

Zauważmy, że zbiór $A = \{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ wyrazów ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbiorem ograniczonym z góry i niepustym, ma więc kres górny. Wykażemy, że ten właśnie kres górny jest poszukiwaną granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Niech $g = \sup A$. Chcemy wykazać, że $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, a więc że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ g-\varepsilon \overset{①}{<} a_n \overset{②}{<} g+\varepsilon$.

Na początek zauważmy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq g < g+\varepsilon$, więc nierówność ② jest spełniona dla dowolnego $\varepsilon>0$ i $n\in\mathbb{N}$ (a nie tylko dla $n>n_0$). Pozostaje wykazać ①.

Liczba $g-\varepsilon$ jest mniejsza niż $g=\sup A$, więc istnieje n_0 t. że $a_{n_0} > g-\varepsilon$. Wtedy z tego, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, mamy

$\forall_{n>n_0}\ a_n \geq a_{n_0} > g-\varepsilon$ i to daje nierówność ①.

$\square$.

A co z tymi ciągami niemalejącymi, które nie są ograniczone z góry?

Twierdzenie: Ciąg niemalejący i nieograniczony z góry jest rozbieżny do $+\infty$. Analogicznie, ciąg nierosnący i nieograniczony z dołu jest rozbieżny do $-\infty$.

Dowód: jak poprzednio, zajmiemy się tylko pierwszym przypadkiem. Skoro ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieogr. z góry, to $\sim\left(\underset{M}{\exists}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_m \le M\right) \Leftrightarrow \underset{M}{\forall}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists}\ a_m > M$

Ale skoro ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, to

$$\underset{n>m}{\forall}\quad a_n \geqslant a_m > M$$

i łącząc jedno z drugim $\underset{M}{\forall}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>m}{\forall}\ a_n > M$

co oznacza właśnie, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Jeszcze jeden rachunek: sprawdźmy, jaka jest granica ciągu $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Przy pomocy kalkulatora łatwo możemy sprawdzić, że $a_{10} = 1{,}258\ldots$

$$a_{100} = 1{,}047\ldots$$

$$a_{1000} = 1{,}0069\ldots$$

więc naturalną jest hipoteza, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Chcemy, dla ustalonego $\varepsilon>0$, znaleźć n_ε t.ż.

$$\underset{n>n_\varepsilon}{\forall}\qquad |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon .$$

Oznaczmy $\sqrt[n]{n} - 1 = \delta_n$. Łatwo możemy sprawdzić, że $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>1}}{\forall}\ \delta_n > 0$, bo $\sqrt[n]{n} > 1$

$$\Updownarrow$$

$$n > 1^n = 1 .$$

Mamy $\sqrt[n]{n} = 1+\delta_n$, więc

$$n = (1+\delta_n)^n = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}\cdot\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + \ldots =$$

$$= 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \ldots$$

W szczególności

$$\cancel{n} > \frac{\cancel{n}(n-1)}{2}\,\delta_n^{\,2} \qquad (*)$$

Chcemy wykazać, że dla $n > n_\varepsilon$

$$\delta_n = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon .$$

z $(*)$ mamy $\delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

Jeżeli więc n będzie na tyle duże, by

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

nierówność $\delta_n < \varepsilon$ będzie spełniona.

$$\left(\text{bo } \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon\right).$$

Nierówność $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ jest równoważna $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$; jeżeli więc przyjmiemy $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$ (albo cokolwiek większego od tej liczby), to

$$\forall_{n > n_\varepsilon} \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \delta_n < \varepsilon .$$

Definicja: Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy podciągiem ciągu (a_n)

np. $(a_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$, czyli $a_2, a_4, a_8, a_{16}, \ldots$

$(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$

ciąg (a_n) też jest swoim własnym podciągiem

Twierdzenie: Jeżeli ciąg (a_n) ma granicę (skończoną lub nie), to wszystkie jego podciągi mają tę samą granicę co (a_n).

Dowód: Mamy 3 możliwości:

① (a_n) jest zbieżny do $g\in\mathbb{R}$.
② (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$
③ (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$.

Zanim rozpatrzymy te przypadki, zauważmy nast. fakt: jeżeli (n_k) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to $\forall_k \; n_k \geq k$

dowód faktu (indukcja). $n_1 \geq 1$, bo $n\in\mathbb{N}$.

załóżmy, że dla pewnego $k\in\mathbb{N}$ $n_k \geq k$.

$n_{k+1} > n_k$, bo ciąg (n_k) jest rosnący, ale że n_k i $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, oznacza to, że $n_{k+1} \geq n_k + 1$

i z zał. indukcyjnego $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k+1$.

① ciąg (a_n) jest zbieżny do g, więc

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n-g|<\varepsilon.$$

Jeżeli $k>n_\varepsilon$, to $n_k>k>n_\varepsilon$, zatem

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{k>n_\varepsilon} |a_{n_k}-g|<\varepsilon$, co oznacza, że $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=g$.

② $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, czyli

$$\forall_{M} \exists_{n_M} \forall_{n>n_M} a_n > M.$$

jak poprzednio, gdy $k>n_M$ to n_k tym bardziej jest $>n_M$, zatem $\forall_{M} \exists_{n_M} \forall_{k>n_M} a_{n_k}>M \iff \lim_{k\to\infty} a_{n_k}=+\infty$.

③ tak samo, jak poprzednie punkty.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli ciąg ma 2 podciągi o różnych granicach, to nie ma on granicy.

<u>Twierdzenie</u> (o szacowaniu)

① jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny i dddn zachodzi $a_n\le M$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$ (analogicznie, gdy dddn $a_n\ge M$, to $\lim_{n\to\infty} a_n\ge M$).

② jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n < M$, to dddn $a_n<M$.

Analogicznie, gdy $\lim_{n\to\infty} a_n>M$, to dddn $a_n>M$

<u>Umowa</u>:

Napis: $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}$ coś zachodzi oznacza: dla dost. dużych n (tj. większych niż n_0) coś zachodzi. Będziemy zatem czasami pisać po prostu: „dla dostatecznie dużych n", w skrócie dddn.

③ jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, to dddn $a_n < b_n$

④ jeżeli dddn $a_n \le b_n$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

Uwaga do punktu ②

Z tego, że dddn $a_n > M$ nie wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n > M$, a jedynie, że $\lim_{n\to\infty} a_n \ge M$.

Przykład: $\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \frac{1}{n} > 0$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ge 0$.

Podobna uwaga do punktu ③:

Z tego, że $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$ nie wynikają żadne nierówności między a_n i b_n dla dużych n:

niech $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \le 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$; dla n parzystych $a_n = \frac{1}{n} > -\frac{1}{n} = b_n$

dla n nieparzystych $a_n = -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} = b_n$.

Dowód:

① (nie wprost) załóżmy, że dddn $a_n \le M$, ale $g = \lim_{n\to\infty} a_n > M$.

Przyjmijmy w def. granicy ciągu (a_n) $\varepsilon = g - M > 0$.

Mamy wówczas dddn

$$g - a_n \le |a_n - g| < \varepsilon = g - M \Rightarrow a_n > M \ \lightning$$

przypadek, gdy $a_n \ge M$ pozostawiam Państwu.

② Jak poprzednio, w def. granicy połóżmy $\varepsilon = M - g > 0$

$$\exists_{n_\varepsilon} \forall_{n > n_\varepsilon} \ |a_n - g| < \varepsilon = M - g,$$

a więc dddn

$$a_n - g \le |a_n - g| < M - g \Rightarrow a_n < M.$$

③ Weźmy dowolną liczbę x taką, że
$\lim_{n\to\infty} a_n < x < \lim_{n\to\infty} b_n$ (np. $x = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2}$)

z ② dddn $a_n < x$ oraz dddn $x < b_n$,
więc dddn $a_n < b_n$.

④ nie wprost. Gdyby dddn $a_n \le b_n$, ale $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, to z ③ dddn $a_n > b_n$ ↯.

<u>Twierdzenie</u> (o arytmetycznych własnościach granicy).
Niech ciągi (a_n) i (b_n) będą zbieżne,
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Wówczas

① $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

w szczególności ciągi $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ i, przy dodatkowych założeniach, $\frac{a_n}{b_n}$ też są zbieżne!

④ jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, b_n \ne 0$ oraz $b \ne 0$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

<u>Uwaga do ④</u>: Skoro $b \ne 0$, to albo $b > 0$, albo $b < 0$. W obu tych przypadkach, z tw. o szacowaniu punkt ②, dddn $b_n > 0$ lub dddn $b_n < 0$. Stąd dddn $b_n \ne 0$, więc warunek $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, b_n \ne 0$ nie jest potrzebny, jeżeli tylko pogodzimy się z tym, że ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ będzie miał dobrze określone wyrazy dopiero dla $n > n_0$ dla pewnego n_0 (dddn). Ale na granicę $\frac{a_n}{b_n}$ to, co się dzieje z początkowymi wyrazami tego ciągu, nie ma żadnego wpływu.

Dowód:

① Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności ciągów (a_n) i (b_n) wiemy, że

$$\exists_{n_1} \forall_{n > n_1} \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists_{n_2} \forall_{n > n_2} \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Wówczas dla $n > n_3$ zachodzą obie powyższe nierówności. Mamy więc, dla $n > n_3$,

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \overset{n.\Delta}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

czyli $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

② Ustalmy n_1, n_2 i n_3 jak w poprzednim punkcie. Mamy, dla $n > n_3$,

$$|(a_n - b_n) - (a-b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)| \overset{n.\Delta}{\leq} |a_n - a| + |b - b_n| =$$
$$= |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

③. Ciąg (b_n) jest (jako ciąg zbieżny) ograniczony, czyli istnieje $M > 0$ tż. $\forall_{n\in\mathbb{N}} \ |b_n| < M$.

Ze zbieżności (a_n) i (b_n) wiemy, że

$$\exists_{n_1} \forall_{n > n_1} \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad ; \quad \exists_{n_2} \forall_{n > n_2} \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$$

Wtedy, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$,

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{|a| \cdot \varepsilon}{2|a|+1} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{|a|}{|a| + 1} \right) < \varepsilon .$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(4) Ze zbieżności ciągów (a_n) i (b_n) mamy, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_1} \forall_{n>n_1} \quad |a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{|b|}{4}$$

$$\exists_{n_2} \forall_{n>n_2} \quad |b_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{b^2}{4(|a|+1)}$$

Wiemy też z twierdzenia o szacowaniu, że

$$\exists_{n_3} \forall_{n>n_3} \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}$$

(trzeba oddzielnie rozpatrzeć przypadki, gdy $b>0$ i $b<0$; gdy $b<0$, to $b<\frac{b}{2}$, więc dddn $b_n < \frac{b}{2}$, co w związku z tym, że $b<0$ oznacza, że $|b_n| > \frac{|b|}{2}$; gdy $b>0$, to $b > \frac{b}{2} \Rightarrow$ dddn $b_n > \frac{b}{2} \Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2}$).

Niech $n_4 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Dla $n > n_4$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n b|} = \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n|\,|b|} \overset{n.\triangle}{\leq}$$

$$\leq \frac{|a_n - a|\,|b| + |a|\,|b_n - b|}{|b_n|\cdot|b|} = \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b|}\,\frac{|b_n - b|}{|b_n|}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \frac{\cancel{|b|}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{|b|}} + \frac{|a|}{\cancel{|b|}} \cdot \varepsilon \frac{\cancel{b^2}}{\underset{2}{\cancel{4}}(|a|+1)} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{|b|}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|}{|a|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Twierdzenie (o 3 ciągach)</u>: Jeśli dddn zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad (*)$$

i ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to również ciąg (b_n) jest zbieżny do g.

<u>Dowód</u>: Niech n_1 będzie takie, że dla $n > n_1$ zachodzi $(*)$.

Ze zbieżności (a_n) i (c_n) mamy:
$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_2} \forall_{n>n_2} \quad a_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$$
$$\exists_{n_3} \forall_{n>n_3} \quad c_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon).$$

Wtedy dla $n > n_4 = \max(n_1, n_2, n_3)$ $\quad g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon$,

więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_4} \forall_{n>n_4} \quad b_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} b_n = g$ $\quad \square$

Użyteczne są też wersje tego twierdzenia dla granic nieskończonych:

Jeżeli dla n zachodzi nierówność

$$a_n \leq b_n \quad (*)$$

oraz ① $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, to również (b_n) jest rozbieżny do $+\infty$

② $\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$, to również (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$

Dowiodę tylko ①, dowód ② jest analogiczny.

Skoro (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$, to

$$\forall_M \exists_{n_M} \forall_{n > n_M} \quad a_n > M.$$

Niech n_1 będzie takie, że dla $n > n_1$ spełniona jest nierówność $(*)$. Wtedy dla $n > n_2 = \max(n_1, n_M)$

$$b_n \geq a_n > M \quad , \quad \text{więc}$$

$$\forall_M \exists_{n_2} \forall_{n > n_2} \quad b_n > M$$

czyli $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$.