<u>Umowa</u>: możemy wyciągać pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych.

$$\sqrt[k]{a} := -\sqrt[k]{(-a)} \quad \text{dla } a<0,\ k \text{ nieparzystego.}$$

taka umowa ma sens, bo oczywiście

$$\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = \left(-\sqrt[k]{(-a)}\right)^k = (-1)^k\left(\sqrt[k]{(-a)}\right)^k = (-1)^k(-a) = -(-a) = a.$$

tu potrzebujemy tego, by k było nieparzyste.

W dowodzie Dedekinda niewymierności pierwiastków korzystaliśmy z $[x]$ – części całkowitej (entier) liczby x. Dla porządku podajmy jej definicję:

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}.$$

Istnienie tego supremum wynika z aksjomatu ciągłości; to, że jest to liczba całkowita, wymaga chwili zabawy z zasadami maksimum i minimum (najlepiej udowodnić, że każdy ogr. z góry podzbiór $\mathbb{Z}$ ma element największy, ogr. z dołu – element najmniejszy — to proste ćwiczenie, gdy mamy odp. twierdzenia dla liczb naturalnych). Oczywiście

będzie za chwilę

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad [x] \le x < [x]+1$$

(ale warto napisać sobie porządnie dowód tego faktu).

Do pary do zasady minimum mamy też dla liczb naturalnych zasadę maksimum:

<u>Twierdzenie</u>: Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $\mathbb{N}$ ma element największy.

<u>Dowód</u> (nie wprost).

Załóżmy, że istnieje niepusty, ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{N}$, ale że $\sup A \notin A$ (a więc w A nie ma elementu największego).

Liczba $\sup A - 1$ jest mniejsza, niż $\sup A$, więc istnieje $m \in A$ takie, że $m > \sup A - 1 \Leftrightarrow m+1 > \sup A$. Tym samym $\forall_{n \in A} \; n < m+1$ i z punktu 3 twierdzenia o własnościach liczb naturalnych (str. 14 notatek)

$$\forall_{n \in A} \; n \leq m.$$

To oznacza, że $m \in A$ jest ograniczeniem górnym zbioru A — a więc jest w nim elementem największym — wbrew założeniu. ↯

<u>Gęstość $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$</u>

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, istnieje liczba wymierna x leżąca między a a b ($x \in \mathbb{Q}$, $a < x < b$).

<u>Dowód</u>: Najpierw wykażemy, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\frac{1}{n} < b-a$. Istnienie takiego n wynika z pewnika Archimedesa (str. 12 notatek); należy zastosować go do liczb $b-a$ i 1, co daje istnienie liczby $n \in \mathbb{N}$

spełniającej $1 < n(b-a)$, co oczywiście jest równoważne $\frac{1}{n} < b-a$.

Teraz szukamy liczby postaci $\frac{m}{n}$, leżącej pomiędzy a i b. Załóżmy na początek, że $b > 0$. Wówczas zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} \geq b\} \text{ jest}$$

· niepusty (pewnik Archimedesa zastosowany do liczb 1 i nb)

więc z zasady minimum ma element najmniejszy m_0. Mamy

$$\frac{m_0}{n} \geq b \underset{\text{bo } m_0-1 \notin A}{>} \frac{m_0-1}{n} = \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} \underset{\text{bo } \frac{m_0}{n} \geq b}{\geq} b - \frac{1}{n} \underset{\text{bo } \frac{1}{n} < b-a}{>} b-(b-a) = a.$$

i w ten sposób wskazaliśmy liczbę wymierną $\frac{m_0-1}{n}$ spełniającą

$$a < \frac{m_0-1}{n} < b.$$

Niech teraz $b \leq 0$. Wówczas $a < 0$ i liczby $-a, -b$ spełniają nierówności

$$0 \leq -b < -a.$$

Umiemy zatem znaleźć liczbę wymierną q t.ż.

$$-b < q < -a$$

i oczywiście $-q \in \mathbb{Q}$ spełnia $a < -q < b$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla liczb niewymiernych:

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, istnieje liczba niewymierna x t.ż. $a < x < b$.

<u>Dowód</u>:
Z poprzedniego twierdzenia umiemy już znaleźć liczbę wymierną q t.ż. $a < q < b$.
Teraz, z pewnika Archimedesa, istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.ż.

$$\sqrt{2} < n(b-q) \qquad \text{(liczby } \sqrt{2} \text{ i } b-q \text{ są dodatnie)},$$

zatem

$$a < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < q + (b-q) = b.$$

Liczba $x = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ jest niewymierna, gdyby bowiem była wymierna, to $n(x-q) = \sqrt{2}$ też byłaby wymierna (oczywiście suma, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi).

<u>Ciągi liczbowe</u>

<u>Definicja</u>: <u>Ciągiem</u> liczb rzeczywistych nazywamy dowolną funkcję określoną na $\mathbb{N}$, o wartościach w $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} a : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ n & \longmapsto & a(n) \end{array}$$

$a(n)$ wartość funkcji a dla argumentu $n \in \mathbb{N}$

tradycyjnie używamy oznaczenia $\boxed{a_n}$ w miejsce $a(n)$.

Definicje:

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest
- rosnący, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} > a_n$
- niemalejący, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \geq a_n$
- nierosnący, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \leq a_n$
- malejący, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} < a_n$

oczywiście ciąg rosnący jest niemalejący (choć nie odwrotnie), podobnie ciąg malejący jest nierosnący. Wszystkie te 4 typy ciągów obejmuje się wspólną nazwą ciągów monotonicznych.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry (odpowiednio – z dołu), gdy

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq M \qquad \left(\text{odp. } \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geq M\right)$$

I najważniejsza definicja:

Def. Mówimy, że liczba $g\in\mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>n_\varepsilon}\ |a_n-g|<\varepsilon$$

Innymi słowy: jakkolwiek małą liczbę ε (dodatnią) ustalimy, to począwszy od pewnego indeksu $(n_\varepsilon+1)$ wszystkie wyrazy ciągu będą od g oddalone o mniej niż ε, a więc będą leżały w przedziale $(g-\varepsilon;\ g+\varepsilon)$.

Na marginesie: niech $a \leq b$.

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}$, to mówimy, że jest <u>zbieżny</u> (do g). Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy, to jest ciągiem <u>rozbieżnym</u>.

<u>Twierdzenie</u>: Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

<u>Dowód</u> (nie wprost).

Załóżmy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma 2 różne granice: g_1 i g_2

z definicji $\forall_{\varepsilon} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n > n_\varepsilon} |a_n - g_1| < \varepsilon$

$\exists_{m_\varepsilon} \forall_{n > m_\varepsilon} |a_n - g_2| < \varepsilon$.

Ustalmy teraz $\varepsilon = \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$.

Dla $n > \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$ zachodzą nierówności

$$|a_n - g_1| < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$$
$$|a_n - g_2| < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$$

co w sumie daje

$$|a_n - g_1| + |a_n - g_2| < |g_1 - g_2| \qquad (*)$$

z drugiej strony, z nierówności trójkąta mamy

$$|g_1 - g_2| = |g_1 - a_n + a_n - g_2| \leq |g_1 - a_n| + |a_n - g_2|$$
$$= |a_n - g_1| + |a_n - g_2|$$

co jest sprzeczne z nierównością $(*)$. $\lightning$

Przykłady ciągów

1° ciąg stały $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = a$

ciąg stały jest zbieżny, jego granicą jest a, gdyż

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>n_\varepsilon}\ \underbrace{|a_n - a|}_{=0} < \varepsilon$$

zawsze!

i n_ε możemy wziąć jakiekolwiek, nawet 1 (niezależnie od wartości ε).

2° $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = \frac{1}{n}$

Ten ciąg też jest zbieżny, ma granicę $g=0$.
Przyjrzyjmy się bowiem potrzebnej nierówności

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ czyli } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Jeżeli zatem położymy $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, to $n > n_\varepsilon$ będą spełniały warunek $n > \frac{1}{\varepsilon}$, a więc i $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Umiemy zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyznaczyć n_ε tak, by spełniona była definicja granicy

3° Ciąg Fibonacciego: $a_1 = a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
($a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$ itd.)
Taki sposób definiowania ciągu, odwołujący się do wcześniej obliczonych wyrazów, nazywamy rekurencją (recurrere – łac. przybiec z powrotem).
Ciąg ten pojawił się w dziele Leonarda z Pizy (~1175-1250) zwanego Fibonaccim (syn Bonacciego) Liber abaci, jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się królików.

Wśród ciągów rozbieżnych mamy pewną szczególną klasę ciągów, które są „prawie zbieżne" – – tj. możemy im przypisać granicę, tylko że nieskończoną.

Def. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (odpowiednio: rozbieżny do $-\infty$), jeżeli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}} \ \exists_{n_M\in\mathbb{N}} \ \forall_{n>n_M} \quad a_n > M \qquad (\text{odpowiednio } a_n < M).$$

Oznaczenie: Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do granicy g, to piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

lim – skrót od łac. limes (granica).

Analogicznie, jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (ew. $-\infty$), piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\text{lub } -\infty).$$