Analiza matematyczna 1.1
semestr zimowy 2010

Paweł Goldstein
goldie@mimuw.edu.pl
http:\\www.mimuw.edu.pl\~goldie
pokój 5160

Zasady zaliczania

2 kolokwia	2×35 punktów
prace domowe	15 punktów
aktywność na ćwiczeniach	15 punktów
+	
	= 100 punktów

Kolokwia odbędą się 26 listopada i 14 stycznia, o 16^{15}. Na każdym będzie 6 jednakowo punktowanych zadań, w tym co najmniej 4 z jawnej, zawczasu znanej puli zadań, które począwszy od połowy października będzie można znaleźć na mojej stronie internetowej (pula będzie stopniowo przyrastać).

Na kolokwiach nie wolno oczywiście korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy koleżeńskiej etc. Należy przynieść własny papier (każde rozwiązanie na oddzielnej kartce).

<u>Uwaga</u>: Zgodnie z regulaminem studiów obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa; nieobecność (nieusprawiedliwiona) na więcej niż 4 zajęciach może być przyczyną wyrejestrowania z przedmiotu (= niezaliczenia).

• Czym zajmuje się analiza matematyczna?

W dużym uproszczeniu – badaniem własności funkcji (określonych na podzbiorach $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$, czasem na bardziej złożonych przestrzeniach), w szczególności zachowania funkcji w pobliżu ustalonego punktu. To oczywiście bardzo mętne, analiza matematyczna jest nie tylko teorią matematyczną, ale też pewnym językiem, bez którego trudno wysłowić zarówno ją samą, jak i większość współczesnej matematyki (i nie tylko matematyki). Duża część tego semestru będzie poświęcona zbudowaniu i nauce tego języka.

• Teoria aksjomatyczna

Jak powstaje teoria matematyczna? Ustalamy, bez definiowania, pewne podstawowe obiekty teorii, oraz aksjomaty (pewniki) – związki między tymi obiektami. Mając je możemy z pewników wywodzić twierdzenia.

Na dzisiejszym wykładzie przedstawimy aksjomaty liczb rzeczywistych.

Obiekty: <u>zbiór</u> (nieznanych na razie elementów) $\mathbb{R}$

działania: <u>dodawanie</u>

każdej parze (x,y) elementów $\mathbb{R}$ przypisuje dokładnie jeden element $\mathbb{R}$, oznaczany $x+y$

<u>mnożenie</u>

każdej parze (x,y) . . . .

\- - - - -.

oznaczany $x \cdot y$.

<u>relacja nierówności</u> $<$ (relacja porządku)

każdej parze (x,y) przypisuje wartość logiczną (prawda lub fałsz).

Piszemy $x<y$, gdy parze (x,y) przypisana jest wartość „prawda".

<u>Aksjomaty</u>

wygodnie podzielić je na grupy

I aksjomaty dodawania

II aksjomaty mnożenia

III aksjomaty porządku

IV aksjomat ciągłości.

I aksjomaty dodawania

① przemienność dodawania

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x+y = y+x$$

② łączność dodawania

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$$

③ w $\mathbb{R}$ istnieje element 0 o tej własności,
że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad x+0 = x$ (istnienie zera)

④ istnienie elementu przeciwnego:

$\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists$ element przeciwny do x, ozn. $(-x)$, o własności

$$x+(-x) = 0$$

Zbiór z działaniem spełniającym aksjomaty ①-④ nazywamy <u>grupą przemienną</u>.

II aksjomaty mnożenia

5 przemienność mnożenia

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

6 łączność mnożenia

$$\forall_{z,x,y \in \mathbb{R}} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

7 istnienie jedynki: w $\mathbb{R}$ istnieje element oznaczany 1 o tej własności, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad 1 \cdot x = x$$

, przy czym 1 jest różne od 0.

8 istnienie elementu odwrotnego:

Dla dowolnej, różnej od 0 liczby rzeczywistej (tj. elementu $\mathbb{R}$) x istnieje element odwrotny oznaczany x^{-1} o tej własności, że

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

i aksjomat 9, wiążący mnożenie z dodawaniem:

rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}} \quad x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Zbiór spełniający aksjomaty 1 - 9 nazywamy ciałem. Zauważmy, że aksjomaty 5 - 8 mówią, że $\mathbb{R}$ bez 0 tworzy grupę przemienną (z działaniem mnożenia).

Zauważmy, że nigdzie wśród aksjomatów nie ma innej reguły wiążącej dodawanie z mnożeniem : $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad 0 \cdot x = 0$

zdefiniowane w aksjomacie 3

Fakt ten wynika z podanych wyżej własności - aksjomatów - dodawania i mnożenia, a więc jest to twierdzenie. Dla ilustracji udowodnimy je:

z aksj. 7 $\forall_{x \in \mathbb{R}} \; 1 \cdot x = x$, ale z 3 $1 = 1 + 0$, więc

$(1+0) \cdot x = x$

z 9 $1 \cdot x + 0 \cdot x = x$

z 7 $x + 0 \cdot x = x$

teraz z 4 $x + (-x) = 0$

$x + 0 \cdot x + (-x) = 0$

z 1 $0 \cdot x + \underbrace{x + (-x)}_{z\ 4\ = 0} = 0$

$0 \cdot x + 0 = 0$

z 3 $0 \cdot x$

Okropnie to rozwlekłe, ale korzystaliśmy tylko z aksjomatów

III aksjomaty porządku

(10) zasada trichotomii: $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}$ zachodzi dokładnie jedna z poniższych 3 możliwości:

$$x = y$$
albo $x < y$
albo $y < x$

(11) przechodniość nierówności

$\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$ i $y<z$, to $x<z$

i aksjomaty wiążące nierówność z działaniami:

(12) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$, to $x+z < y+z$

(13) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}$ jeżeli $0<x$ i $0<y$, to $0 < x \cdot y$.

Uwaga o notacji: $x > y \iff y < x$

$x \leq y \iff x<y$ lub $x=y$

$x \geq y \iff y \leq x$ itp.

Został nam ostatni, bardzo ważny aksjomat, zwany aksjomatem ciągłości lub aksjomatem Dedekinda. Żeby go jednak wysłowić, potrzebujemy kilku definicji.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) niemiecki matematyk, uczeń Gaussa i Dirichleta, autor wielu prac dotyczących podstaw matematyki i pojęć takich jak pierścień czy grupa.

<u>Definicja</u>: Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest <u>ograniczony z góry</u> (przez $M \in \mathbb{R}$), jeżeli

$$\forall_{x \in A} \quad x \leq M.$$

Mówimy wówczas, że M jest <u>ograniczeniem górnym</u> zbioru A.

Na przykład zbiór liczb z przedziału $(0;7)$ jest ograniczony z góry (przez 8, 15, $7\frac{1}{2}$ czy 7).

<u>Definicja</u> Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest <u>kresem górnym</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(•) a jest ograniczeniem górnym zbioru A

oraz

(••) jeżeli $b < a$, to b NIE JEST ograniczeniem górnym zbioru A, tj. istnieje $x \in A$ tż. $b < x$.

Innymi słowy, kres górny to najmniejsze ograniczenie górne zbioru A. Oznaczamy go $\sup A$. (supremum)

14 aksjomat ciągłości: każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny.

<u>Umowa</u>: Jeżeli A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup A = +\infty$; jeżeli $A = \emptyset$, to piszemy $\sup A = -\infty$.

Analogicznie do kresu górnego definiujemy <u>kres dolny</u> zbioru A jako największe z ograniczeń dolnych zbioru A; oznaczamy go $\inf A$ (infimum nie infinum! od infimus - drobny, niewielki)

Istnienie kresu dolnego zbioru ograniczonego z dołu wynika już z aksjomatu ciągłości. Jeżeli bowiem przyjmiemy $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$, to gdy A jest ograniczony z dołu przez M, liczba $(-M)$ jest ograniczeniem górnym B, więc B ma (z aksj. 14) kres górny; wystarczy teraz sprawdzić, że $\inf A = -\sup B$.

(to nie jest dowód, tylko zgrubny szkic).

Ważne podzbiory $\mathbb{R}$:

- liczby naturalne $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \bigcap$ wszystkich A-podzbiorów $\mathbb{R}$ o nast. 2 własnościach:
$1 \in A$ i jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

część wspólna

$$= \bigcap \{A \subset \mathbb{R} : 1 \in A \wedge ((x \in A) \Rightarrow (x+1 \in A))\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

- liczby całkowite $\mathbb{Z}$ (Zahl)

$\mathbb{Z} = \{m + (-n) : m, n \in \mathbb{N}\}$

ozn.: $m - n$

- liczby wymierne $\mathbb{Q}$ (quotient)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

to oczywiście umowny zapis, oznaczający $p \cdot q^{-1}$

Uwaga: $\mathbb{N}$ ze standardowymi działaniami $\cdot, +$ spełnia aksjomaty 1, 2, 5-7, 9-14, ale 3, 4 i 8 nie.

$\mathbb{N} \cup \{0\}$ nie spełnia 4 i 8

$\mathbb{Z}$ nie spełnia 8

$\mathbb{Q}$ nie spełnia 14 !

O tym ostatnim spostrzeżeniu będziemy jeszcze mówić sporo na następnym wykładzie.

<u>Twierdzenie:</u> Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry.

<u>Dowód.</u> Zauważmy na początek, że $\mathbb{N} \neq \emptyset$, bo $1 \in \mathbb{N}$. Dalej dowód będzie nie wprost – załóżmy, że $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Wówczas, z aksjomatu ciągłości, $\mathbb{N}$ ma kres górny $\sup \mathbb{N}$. Oznaczmy $a = \sup \mathbb{N}$, wówczas $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \leq a$.
Wiemy też, że $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n+1 \in \mathbb{N}$, więc również

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n+1 \leq a$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \leq a-1$$

a więc $a-1$ jest ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$; zatem $a-1 \geq \sup \mathbb{N} = a$

$$a-1 \geq a \quad /+(1-a)$$

$$0 \geq 1 \ \lightning \text{ sprzeczność, bo } 1 > 0.$$

<u>Wniosek</u> (pewnik Archimedesa)

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}},\ a,b>0 \ \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad an > b$$

<u>Dowód</u>: Gdyby, przeciwnie, $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ an \leq b$, to $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \leq \frac{b}{a}$, więc $\frac{b}{a}$ byłoby ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$, a takiego nie ma.

Def. Wartością bezwzględną (modułem) liczby x nazywamy liczbę

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Twierdzenie (własności wart. bezwzględnej)

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

① $|-x| = |x|$

② $|x| \geq x$

③ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

④ $|x+y| \leq |x| + |y|$

⑤ $||x| - |y|| \geq |x-y|$

$\left.\begin{matrix} ④ \\ ⑤ \end{matrix}\right\}$ nierówności trójkąta

Dowody ①-③ są trywialne, wymagają tylko rozpatrzenia przypadków ($x \geq 0$, $x < 0$; analogicznie z y).

Dowód ④: Rozpatrzmy 2 przypadki

(•) $x+y \geq 0$. Wówczas $|x+y| = x+y \overset{z②}{\leq} |x| + |y|$.

(••) $x+y < 0$. Wówczas $|x+y| = -x-y = (-x) + (-y) \overset{z②}{\leq} |-x| + |-y|$

$$\overset{z①}{=} |x| + |y|$$

Dowód ⑤: Zauważmy, że:

(•) $||x| - |y|| = \quad |x| - |y| \quad$ lub $\quad |y| - |x|$

(••) $|x| = |(x-y) + y| \underset{z④}{\leq} |x-y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y|$

$$|y| \overset{z①}{=} |-y| = |(x-y) - x| \leq |x-y| + |-x| = |x-y| + |x|$$

$$\Rightarrow |y| - |x| \leq |x-y|$$

a więc zarówno $|x| - |y|$, jak i $|y| - |x|$ są $\leq$ od $|x-y|$, a $||x| - |y||$ jest zawsze równy jednej z tych dwóch liczb.

Liczby naturalne i zasada indukcji

Przypomnijmy, jak definiujemy liczby naturalne:

Rozważamy rodzinę $\mathcal{A}$ tych wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$, które spełniają nast. warunki:

(•) $1 \in A$

(••) jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

$\mathbb{N}$ to część wspólna wszystkich zbiorów z $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

Twierdzenie

1. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \geq 1$
2. jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$, to $n-1 \in \mathbb{N}$
3. jeśli $n, m \in \mathbb{N}$ i $m > n$, to $m \geq n+1$

Dowód: Dowody wszystkich punktów będą bardzo podobne: oznaczymy przez A zbiór liczb naturalnych spełniających tezę odp. punktu. Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$ (z definicji). Następnie wykażemy, że A spełnia warunki (•) i (••) powyżej, a więc $A \in \mathcal{A}$, skąd $\mathbb{N} \subset A$. Mamy zatem $\mathbb{N} \subset A$, $A \subset \mathbb{N}$ $\Rightarrow A = \mathbb{N}$, a więc teza punktu spełniona jest przez wszystkie liczby naturalne.

Tę metodę dowodzenia twierdzeń, znaną jako zasada indukcji, sformułujemy w ogólnej postaci niebawem.

① Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \}$. Jak pisałem, z definicji $A \subset \mathbb{N}$. Teraz sprawdzimy warunki (·) i (··)

(·) czy $1 \in A$? tak, bo $1 \geq 1$.

(··) Niech $k \in A$. Czy $k+1 \in A$? tak, bo $k+1 \geq k$, a skoro $k \in A$, to $k \geq 1$. Z przechodniości

$$k+1 \geq k \geq 1$$
$$\Rightarrow k+1 \geq 1.$$

② Teraz $A = \{ n \in \mathbb{N} : (n > 1) \Rightarrow (n-1 \in \mathbb{N}) \}$

(·) czy $1 \in A$? Dla $n = 1$ poprzednik implikacji $(n>1)$ jest fałszywy, więc sama implikacja jest prawdziwa, jaki by nie był następnik. Zatem $1 \in A$.

(··) Niech $k \in A$ (a więc dla $n=k$ implikacja: $(k>1) \Rightarrow (k-1 \in \mathbb{N})$ jest prawdziwa).

Czy jest spełniona dla $n = k+1$?

$$(k+1 > 1) \overset{?}{\Rightarrow} (k+1-1 \in \mathbb{N})$$

Poprzednik implikacji jest prawdziwy, bo $k+1 > k \underset{= ①}{\geq} 1$.

Co z następnikiem? też prawdziwy, bo

$k+1-1 = k \in \mathbb{N}$, bo $k \in A$, więc $k \in \mathbb{N}$.

Tak więc cała implikacja jest prawdziwa, czyli

$k+1 \in A$.

③ Teraz $A = \{ n \in \mathbb{N} : (m \in \mathbb{N} \; m > n) \Rightarrow (m \geq n+1) \}$.

(·) czy $1 \in A$? Dla $n=1$ implikacja ma postać

$$(m \in \mathbb{N} \wedge m > 1) \Rightarrow (m \geq 2)$$

Jeżeli prawdziwy jest poprzednik $(m \in \mathbb{N}, m > 1)$, to z ② $m-1 \in \mathbb{N}$, więc z ① $m-1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2$. A więc z poprzednika wynika następnik.

(··) Załóżmy, że $k \in A$. Czy $k+1 \in A$?

założenie oznacza, że

$$\underbrace{(m \in \mathbb{N} \wedge m > k)} \Rightarrow (m \geq k+1).$$

a teza

$$(m \in \mathbb{N} \wedge m > k+1) \overset{?}{\Rightarrow} (m \geq k+1+1)$$

Jeżeli poprzednik założenia jest fałszywy, to fałszywy jest poprzednik tezy (oczywiste) i obie implikacje są prawdziwe.

Jeżeli zaś poprzednik założenia jest prawdziwy, a więc $m \in \mathbb{N} \wedge m > k$, to i następnik też musi być prawdziwy $(m \geq k+1)$. A co z tezą?

Poprzednik tezy:

$m \in \mathbb{N} \wedge \underbrace{m > k+1}$, a więc $m > 1$.

Z ② wiemy, że $m-1 \in \mathbb{N}$ a stąd, że $m-1 > k$.

z założenia zatem (z $m-1$ w miejsce m)

$m-1 \geq k+1 \Leftrightarrow m \geq k+1+1 = k+2$ a to jest następnik tezy.

Implikacja z tezy jest więc prawdziwa i $k+1 \in A$.

Pora na obiecaną zasadę indukcji.

Mamy pewną własność T, przypisywaną pewnym liczbom naturalnym. Najczęściej chodzi o sytuację, gdy własność ta to spełnianie przez liczbę n pewnego twierdzenia, np: „n prostych na płaszczyźnie ma co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ punktów przecięcia."

Twierdzenie

Jeżeli
1. 1 ma własność T,
2. jeżeli n ma własność T, to $n+1$ też,

to własność T mają wszystkie liczby naturalne.

Dowód: Oczywiście jak poprzednio:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ ma własność } T \}.$$

z założeń mamy, że $\underbrace{1 \in A, \quad (n \in A) \Rightarrow ((n+1) \in A)}_{\Downarrow \; \mathbb{N} \subset A}$,
a że $A \subset \mathbb{N}$, to $A = \mathbb{N}$.

Zastosowanie: Nierówność Bernoulliego.

Twierdzenie: (n. B.)

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ \forall_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > -1}} \quad (1+a)^n \geq 1 + na$$

Definicja potęgi:
dla $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
$a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$;
$0^n = 0$.

Dowód (indukcja).

1. czy twierdzenie zachodzi dla $n=1$?
$(1+a)^1 \overset{?}{\geq} 1 + 1 \cdot a$ tak, obie strony są równe.

② Załóżmy, że nier. Bernoulliego zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall_{a>-1} \quad (1+a)^n \geq 1+na \qquad \text{(założenie indukcyjne)}$$

czy stąd wynika, że

$$\forall_{a>-1} \quad (1+a)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)a \quad ?$$

$$(1+a)^{n+1} = \underbrace{(1+a)^n}_{\text{to jest} >0} \cdot \underbrace{(1+a)}_{\text{to jest} >0} \overset{\text{z założenia indukcyjnego}}{\geq} (1+na)\cdot(1+a) =$$

$$= 1+na+a+na^2$$

$$= 1+(n+1)a + n\cdot a^2 \geq 1+(n+1)a.$$

$$\underbrace{n \geq 1 > 0 \quad a^2 \geq 0}_{\geq 0}$$

a więc wynika.

Na mocy 2. i. twierdzenie zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $\square$

<u>Wniosek</u>: istnienie pierwiastków.

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $b \geq 0$, $b^k = a$. Oznaczamy ją $\sqrt[k]{a}$.

<u>Dowód</u>: Jeżeli $a=0$, to oczywiście $b=0$ spełnia warunki $b\geq 0$, $b^k = a$. To, że to jedyne rozwiązanie, wykażemy za chwilę.

Na razie zajmijmy się przypadkiem $a>0$.

Oznaczmy

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x>0,\ x^k < a\}.$$

zbiór A jest a) niepusty

b) ograniczony z góry.

a) bo $\frac{a}{a+1} \in A$: $\frac{a}{a+1} > 0$, $\left(\frac{a}{a+1}\right)^k < \frac{a}{a+1} < a$,

b) $1+a$ jest ogr. górnym zbioru A:

jeżeli $x \geq 1+a$, to $x^k \geq (1+a)^k \underset{n.B.}{\geq} 1+ka \geq 1+a > a$,

więc $x^k > a$.

stąd $\forall_{y \in A}\ y < 1+a$.

Zbiór A ma zatem kres górny $b = \sup A$. Wykażemy, nie wprost, że $b^k = a$.

Założmy, że $b^k \neq a$. Oznacza to, że $b^k < a$ lub $b^k > a$.

przypadek $b^k < a$:

Niech $\alpha = \dfrac{a-b^k}{2ka}$. Łatwo sprawdzić, że $\alpha > 0$, $\alpha < \dfrac{a}{2ka} = \dfrac{1}{2k} < 1$.

Stąd i z n.B. $(1-\alpha)^k \geq 1 - k\alpha = 1 - \dfrac{a-b^k}{2a}$.

$$= \frac{a+b^k}{2a} \ (>0.)$$

Wykażemy, że $\left(\dfrac{b}{1-\alpha}\right)^k < a$,

choć $\underset{\overset{\uparrow}{\text{oczywiste}}}{\dfrac{b}{1-\alpha} > b}$ (sprzeczność z tym, że $b = \sup A$).

bo wtedy $\dfrac{b}{1-\alpha} \in A$, choć jest za duże

Z wykazanych wyżej nierówności

$$\left(\frac{b}{1-\alpha}\right)^k = \frac{b^k}{(1-\alpha)^k} \leq \frac{b^k}{\frac{a+b^k}{2a}} = \frac{\overset{< a+b^k,\ \text{bo } b^k < a}{2b^k}}{a+b^k} \cdot a < a.$$

przypadek $b^k > a$

Niech $\beta = \dfrac{b^k - a}{2b^k k}$; $\beta > 0$, $\beta < 1$, bo $\beta < \dfrac{b^k}{2b^k k} = \dfrac{1}{2k}$.

$$(b(1-\beta))^k = b^k(1-\beta)^k \geq b^k(1-k\beta) = b^k\left(1 - \frac{b^k - a}{2b^k}\right) =$$

$$= \frac{a+b^k}{2} > \frac{2a}{2} = a, \quad \text{więc } [b(1-\beta)]^k > a.$$

stąd $\forall_{x\in A}\ x^k < a < [b(1-\beta)]^k \Rightarrow x < b(1-\beta)$,

zatem $b(1-\beta)$ jest ogr. górnym A, choć

$$b(1-\beta) < b = \sup A. \ \lightning.$$

Jedyność pierwiastka jest oczywista: gdyby były 2 różne liczby dodatnie, b_1 i b_2, spełniające $b_1^k = a$, $b_2^k = a$, to albo $b_1 < b_2$, albo $b_1 > b_2$; załóżmy to pierwsze.

$b_1 < b_2 \Rightarrow b_1^k < b_2^k$ (dowód: indukcja lub n.B:

$$b_2 = b_1\left(1 + \frac{b_2 - b_1}{b_1}\right)$$

$$b_2^k = b_1^k\left(1 + \frac{b_2-b_1}{b_1}\right)^k \geq$$

$$\geq b_1^k\left(1 + k\frac{b_2-b_1}{b_1}\right)$$

$$a \geq a\left(1 + k\frac{b_2-b_1}{b_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$k\frac{b_2-b_1}{b_1} \leq 0 \ \lightning\ ).$$

i już sprzeczność.

Niewymierność $\sqrt{2}$ (istnienie liczb niewymiernych)

Twierdzenie: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dowód! Załóżmy, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, a więc istnieją $p, q \in \mathbb{N}$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{najw. wsp. dzielnik}}}{(p,q)} = 1$

takie, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2};$$

$$p^2 = 2q^2.$$

Kwadrat liczby nieparzystej jest nieparzysty, więc p musi być parzysta, $p = 2r$

$$(2r)^2 = 2q^2$$
$$4r^2 = 2q^2$$
$$2r^2 = q^2$$

i teraz widać, że i q musi być parzysta $\Rightarrow$ sprzeczność z $(p,q)=1$ $\square$

Twierdzenie (zasada minimum)

Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

$(A \subset \mathbb{N} \wedge A \neq \emptyset) \Rightarrow (\inf A \in A)$.

Dowód (nie wprost)

Załóżmy, że $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ i A nie ma elementu najmniejszego.
Zauważmy na początek, że $1 \notin A$. Gdyby bowiem $1 \in A$, to byłaby elementem najmniejszym (wszystkie liczby nat. są ≥ 1).
Niech teraz $B = \{m \in \mathbb{N} : \forall_{n \in A} \; m < n\}$.
Zbiór B jest niepusty, bo $1 \in B$.

Niech $m \in B$, czyli $\forall_{n \in A} \; m < n$. Liczby m i n są naturalne, więc z ③ poprzedniego twierdzenia

$$(*) \qquad \forall_{n \in A} \; m+1 \leq n$$

Gdyby $m+1 \in A$, to byłoby, na mocy powyższej nierówności, elementem najmniejszym, zatem $m+1 \notin A$. W nierówności $(*)$ możemy zatem „$\leq$" zamienić na „$<$", to zaś oznacza, że $m+1 \in B$. Zbiór B spełnia więc warunki: $1 \in B$, $(m \in B) \Rightarrow (m+1 \in B)$ oraz $B \subset \mathbb{N}$
$\models\!\!\Rightarrow$ $B = \mathbb{N}$ i na A nie ma miejsca
(każdy element A jest ogr. górnym $B = \mathbb{N}$, a tych nie ma); $A = \emptyset$. ↯

<u>Twierdzenie</u> $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$

$a=\log_{10} 2$ to taka liczba, że $10^a = 2$ (cokolwiek 10^a dla $a \notin \mathbb{N}$ może znaczyć).

Jeżeli $a = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, to

$$10^{p/q} = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$10^p = 2^q$$

lewa strona dzieli się przez 5 a prawa nie.

To kiepskie dowody – wymagają podzielności, niezdefiniowanych dotąd logarytmów, jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze. Tu trochę lepszy, korzystający z zasady minimum:

<u>Twierdzenie</u> Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\sqrt{n}$ jest albo naturalna, albo niewymierna.

<u>Dowód</u> (Dedekind?) nie wprost.

Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\sqrt{n}$ nie jest naturalna, ale jest wymierna (postaci $\frac{p}{q}$).

Oznaczmy przez część całkowitą $\sqrt{n}$

oczywiście

$$\underset{\text{bo } \sqrt{n} \notin \mathbb{N}}{0 <} \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \underset{\text{z def.}}{< 1}$$

i jest to liczba wymierna. Stąd

$$K = \{ k \in \mathbb{N} : \ k(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) \in \mathbb{N} \}$$ jest niepusty.

Z zasady minimum w K jest element najmniejszy k_0.

Rozpatrzmy $k_1 = k_0(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Oczywiście $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_0$, ale

$$0 < k_1(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) = k_0(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2 = k_0 \cdot n - 2k_0\sqrt{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor + k_0\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 =$$

$$= \underbrace{k_0 n + k_0\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{2\underbrace{k_0(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)}_{=k_1}\lfloor\sqrt{n}\rfloor}_{\in \mathbb{N}} - 2\underbrace{k_0\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}.$$

a skoro $k_1(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ jest > 0 i $\in \mathbb{Z}$, to $\in \mathbb{N}$ i k_1 spełnia warunek na bycie w K, choć jest mniejsze od k_0 – sprzeczność z minimalnością k_0.