Analiza matematyczna 1.1
semestr zimowy 2010

Paweł Goldstein
goldie@mimuw.edu.pl
http://www.mimuw.edu.pl/~goldie
pokój 5160

Zasady zaliczania

2 kolokwia	2×35 punktów
prace domowe	15 punktów
aktywność na ćwiczeniach	15 punktów
+	= 100 punktów

Kolokwia odbędą się 26 listopada i 14 stycznia, o 16^{15}. Na każdym będzie 6 jednakowo punktowanych zadań, w tym co najmniej 4 z jawnej, zawczasu znanej puli zadań, które począwszy od połowy października będzie można znaleźć na mojej stronie internetowej (pula będzie stopniowo przyrastać).

Na kolokwiach nie wolno oczywiście korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy koleżeńskiej etc. Należy przynieść własny papier (każde rozwiązanie na oddzielnej kartce).

<u>Uwaga</u>: Zgodnie z regulaminem studiów obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa; nieobecność (nieusprawiedliwiona) na więcej niż 4 zajęciach może być przyczyną wyrejestrowania z przedmiotu (= niezaliczeniu).

• Czym zajmuje się analiza matematyczna?

W dużym uproszczeniu – badaniem własności funkcji (określonych na podzbiorach $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$, czasem na bardziej złożonych przestrzeniach), w szczególności zachowania funkcji w pobliżu ustalonego punktu. To oczywiście bardzo mętne, analiza matematyczna jest nie tylko teorią matematyczną, ale też pewnym językiem, bez którego trudno wysłowić zarówno ją samą, jak i większość współczesnej matematyki (i nie tylko matematyki). Duża część tego semestru będzie poświęcona zbudowaniu i nauce tego języka.

• Teoria aksjomatyczna

Jak powstaje teoria matematyczna?
Ustalamy, bez definiowania, pewne podstawowe obiekty teorii, oraz aksjomaty (pewniki) – – związki między tymi obiektami. Mając je możemy z pewników wywodzić twierdzenia.

Na dzisiejszym wykładzie przedstawimy aksjomaty liczb rzeczywistych.

Obiekty: <u>zbiór</u> (nieznanych na razie elementów) $\mathbb{R}$

działania: <u>dodawanie</u>

każdej parze (x,y) elementów $\mathbb{R}$ przypisuje dokładnie jeden element $\mathbb{R}$, oznaczany $x+y$

<u>mnożenie</u>

każdej parze (x,y) . . . .

\- - - - - .

oznaczany $x \cdot y$.

<u>relacja nierówności</u> $<$ (relacja porządku)

każdej parze (x,y) przypisuje wartość logiczną (prawda lub fałsz).

Piszemy $x<y$, gdy parze (x,y) przypisana jest wartość „prawda".

<u>Aksjomaty</u>

wygodnie podzielić je na grupy

I aksjomaty dodawania

II aksjomaty mnożenia

III aksjomaty porządku

IV aksjomat ciągłości.

I aksjomaty dodawania

① przemienność dodawania

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x+y = y+x$$

② łączność dodawania

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$$

③ w $\mathbb{R}$ istnieje element 0 o tej własności, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; x+0 = x$ (istnienie zera)

④ istnienie elementu przeciwnego:

$\forall_{x\in\mathbb{R}} \; \exists$ element przeciwny do x, ozn. $(-x)$, o własności

$$x+(-x) = 0$$

Zbiór z działaniem spełniającym aksjomaty ①-④ nazywamy <u>grupą przemienną</u>.

II aksjomaty mnożenia

5 przemienność mnożenia

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x\cdot y = y\cdot x$$

6 łączność mnożenia

$$\forall_{z,x,y\in\mathbb{R}} \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

7 istnienie jedynki: w $\mathbb{R}$ istnieje element oznaczany 1 o tej własności, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad 1\cdot x = x$$

, przy czym 1 jest różne od 0.

8 istnienie elementu odwrotnego:

Dla dowolnej, różnej od 0 liczby rzeczywistej (tj. elementu $\mathbb{R}$) x istnieje element odwrotny oznaczany x^{-1} o tej własności, że

$$x\cdot x^{-1} = 1$$

i aksjomat 9, wiążący mnożenie z dodawaniem:

rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$$

Zbiór spełniający aksjomaty 1 - 9 nazywamy ciałem. Zauważmy, że aksjomaty 5 - 8 mówią, że $\mathbb{R}$ bez 0 tworzy grupę przemienną (z działaniem mnożenia).

Zauważmy, że nigdzie wśród aksjomatów nie ma innej reguły wiążącej dodawanie z mnożeniem: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad 0 \cdot x = 0$

zdefiniowane w aksjomacie 3

Fakt ten wynika z podanych wyżej własności – aksjomatów – dodawania i mnożenia, a więc jest to twierdzenie. Dla ilustracji udowodnimy je:

z aksj. 7 $\forall_{x \in \mathbb{R}} \; 1 \cdot x = x$, ale z 3 $1 = 1 + 0$, więc

$$(1+0) \cdot x = x$$

z 9 $\quad 1 \cdot x + 0 \cdot x = x$

z 7 $\quad x + 0 \cdot x = x$

teraz z 4 $\quad x + (-x) = 0$

$$x + 0 \cdot x + (-x) = 0$$

z 1 $\quad 0 \cdot x + \underbrace{x + (-x)}_{z\ 4\ = 0} = 0$

$$0 \cdot x + 0 = 0$$

z 3 $\quad 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x$

Okropnie to rozwlekłe, ale korzystaliśmy tylko z aksjomatów

III aksjomaty porządku

(10) zasada trichotomii: $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ zachodzi dokładnie jedna z poniższych 3 możliwości:

$$x=y$$
albo $x<y$
albo $y<x$

(11) przechodniość nierówności

$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$ i $y<z$, to $x<z$

i aksjomaty wiążące nierówność z działaniami:

(12) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$, to $x+z<y+z$

(13) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ jeżeli $0<x$ i $0<y$, to $0<x\cdot y$.

Uwaga o notacji: $x>y \iff y<x$

$x\leq y \iff x<y$ lub $x=y$

$x\geq y \iff y\leq x$ itp.

Został nam ostatni, bardzo ważny aksjomat, zwany aksjomatem ciągłości lub aksjomatem Dedekinda. Żeby go jednak wysłowić, potrzebujemy kilku definicji.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) niemiecki matematyk, uczeń Gaussa i Dirichleta, autor wielu prac dotyczących podstaw matematyki i pojęć takich jak pierścień czy grupa.

<u>Definicja</u>: Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest <u>ograniczony z góry</u> (przez $M \in \mathbb{R}$), jeżeli

$$\forall_{x \in A} \quad x \leq M.$$

Mówimy wówczas, że M jest <u>ograniczeniem górnym</u> zbioru A.

Na przykład zbiór liczb z przedziału $(0;7)$ jest ograniczony z góry (przez 8, 15, $7\frac{1}{2}$ czy 7).

<u>Definicja</u> Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest <u>kresem górnym</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(•) a jest ograniczeniem górnym zbioru A

oraz

(••) jeżeli $b < a$, to b NIE JEST ograniczeniem górnym zbioru A, tj. istnieje $x \in A$ t.ż. $b < x$.

Innymi słowy, kres górny to najmniejsze ograniczenie górne zbioru A. Oznaczamy go

$\sup A$. (supremum)

14 aksjomat ciągłości: każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny.

<u>Umowa</u>: Jeżeli A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup A = +\infty$; jeżeli $A = \emptyset$, to piszemy $\sup A = -\infty$.

Analogicznie do kresu górnego definiujemy <u>kres dolny</u> zbioru A jako największe z ograniczeń dolnych zbioru A; oznaczamy go $\inf A$ (infimum nie infinum! od infimus - drobny, niewielki)

Istnienie kresu dolnego zbioru ograniczonego z dołu wynika już z aksjomatu ciągłości. Jeżeli bowiem przyjmiemy $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$, to gdy A jest ograniczony z dołu przez M, liczba $(-M)$ jest ograniczeniem górnym B, więc B ma (z aksj. 14) kres górny; wystarczy teraz sprawdzić, że $\inf A = -\sup B$.

(to nie jest dowód, tylko zgrubny szkic).

Ważne podzbiory $\mathbb{R}$:

• liczby naturalne $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \bigcap$ wszystkich A-podzbiorów $\mathbb{R}$ o nast. 2 własnościach: $1 \in A$ i jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

część wspólna

$$= \bigcap \{A \subset \mathbb{R} : 1 \in A \wedge ((x \in A) \Rightarrow (x+1 \in A))\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

• liczby całkowite $\mathbb{Z}$ (Zahl)

$\mathbb{Z} = \{m + (-n) : m, n \in \mathbb{N}\}$

ozn: $m - n$

• liczby wymierne $\mathbb{Q}$ (quotient)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

to oczywiście umowny zapis, oznaczający $p \cdot q^{-1}$

Uwaga: $\mathbb{N}$ ze standardowymi działaniami $\cdot, +$ spełnia aksjomaty 1, 2, 5-7, 9-14, ale 3, 4 i 8 nie.

$\mathbb{N} \cup \{0\}$ nie spełnia 4 i 8

$\mathbb{Z}$ nie spełnia 8

$\mathbb{Q}$ nie spełnia 14 !