Metoda rezolucji

Metoda rezolucji (Robinson, 1965) jest pełną (i stosunkowo efektywną) procedurą dowodzenia twierdzeń w logice pierwszego rzędu.

Problem dowodzenia twierdzeń: Dla danej bazy wiedzy KB i danej formuły α stwierdzić, czy $KB \models \alpha$. (Problem półrozstrzygalny.)

Problem dowodzenia twierdzeń jest równoważny **problemowi spełnialności**: Dla danej bazy wiedzy KB i danej formuły α stwierdzić, czy zbiór $KB \cup \{\neg\alpha\}$ jest niespełnialny.

Ponieważ bazy wiedzy są skończone, $KB \cup \{\neg\alpha\}$ można zawsze traktować jako pojedynczą formułę.

Metoda rezolucji dla danej formuły β próbuje stwierdzić, czy β jest niespełnialna.

Metodę rezolucji stosuje się dla formuł w postaci **klauzulowej**.

Klauzula – formuła postaci

$$l_1 \vee \cdots \vee l_n \quad (n \geq 0) \tag{1}$$

gdzie $l_1, \ldots, l_n$ są literałami. Jeśli $n = 0$, klauzulę (1) nazywamy **klauzulą pustą** i oznaczamy symbolem $\perp$.

W przypadku formuły logiki zdań postać klauzulowa jest koniunkcyjną postacią normalną – *CNF* – tej formuly. Sprowadzenie formuły zdaniowej do *CNF* zachowuje równoważność.

Sprowadzanie formuły zdaniowej do koniunkcyjnej postaci normalnej – CNF

terminologia:

- literał - zmienna zdaniowa lub jej negacja
- klauzula -alternatywa literałów
- Mówimy, że klauzula c_1 absorbuje klauzulę c_2 wtedy i tylko wtedy, gdy c_1 jest podformułą c_2.

Algorytm

wejście: A – formuła logiki zdań; wyjście: formuła w CNF

1. {Eliminacja $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$} Zastępuj w formule A

   $B \Rightarrow C$ przez $\neg B \vee C$
   $B \Leftrightarrow C$ przez $(\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

   tak długo, aż otrzymana formuła zawiera wyłącznie spójniki $\neg, \wedge, \vee$.

2. {Przesuwanie $\neg$ "w głąb"} W formule otrzymanej w kroku 1. zastępuj

   $\neg(B \vee C)$ przez $\neg B \wedge \neg C$
   $\neg(B \wedge C)$ przez $\neg B \vee \neg C$
   $\neg\neg B$ przez B

tak długo, aż wszystkie wystąpienia negacji znajdą się bezpośrednio przed zmiennymi.

3. {Rozdzielenie $\wedge$ przez $\vee$} W formule otrzymanej w kroku 2. zastępuj tak długo jak to możliwe

$$(B \wedge C) \vee D \quad \text{przez} \quad (B \vee D) \wedge (C \vee D)$$
$$B \vee (C \wedge D) \quad \text{przez} \quad (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

4. {Skracanie} Usuń wszystkie klauzule równoważne T (true).

5. {Absorpcja} Powtarzaj tak długo jak to możliwe: jeśli formuła otrzymana w kroku 4. zawiera parę klauzul c, c' takich, że c absorbuje c', to usuń c'.

6. Zwróć otrzymaną formułę jako CNF(A).

Formułę w postaci klauzulowej

$$C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$$

możemy zapisać jako zbiór klauzul, tzn. w postaci $\{C_1, \ldots, C_m\}$.

Literał dodatni – formuła atomowa.

Literał ujemny – negacja formuły atomowej.

$| \, l \, |$ oznacza formułę atomową literału l.

Piszemy $l_1, \ldots, l_n \in C$, aby wyrazić fakt, że literały $l_1, \ldots, l_n$ występują w klauzuli C. Jeśli $l_1, \ldots, l_n \in C$, to $C - \{l_1, \ldots, l_n\}$ oznacza klauzulę otrzymaną z C w wyniku usunięcia $l_1, \ldots, l_n$.

Reguła rezolucji

Definicja 1

Niech C_1 i C_2 będą klauzulami. Niech $l_1, \ldots, l_n \in C_1$ $(n > 0)$ i $l'_1, \ldots, l'_k \in C_2$ $(k > 0)$. Załóżmy ponadto, że wszystkie literały $l_1, \ldots, l_n$ są dodatnie i wszystkie literały $l'_1, \ldots, l'_k$ są ujemne lub odwrotnie. Jeśli $\mid l_1 \mid = \ldots = \mid l_n \mid = \mid l'_1 \mid = \ldots = \mid l'_k \mid$, to klauzulę

$$(C_1 - \{l_1, \ldots, l_n\}) \vee (C_2 - \{l'_1, \ldots, l'_k\})$$

nazywamy **rezolwentą** klauzul C_1 i C_2, ozn. RES(C_1, C_2).

Przykład

Niech

$$C_1 = P \vee P \vee Q.$$
$$C_2 = R \vee \neg P.$$

Klauzula $Q \vee R$ jest rezolwentą klauzul C_1 i C_2.
($l_1 = P,\ \ l_2 = P,\ \ l_1' = \neg P.$)

Definicja 3
Regułą rezolucji nazywamy regułę wnioskowania

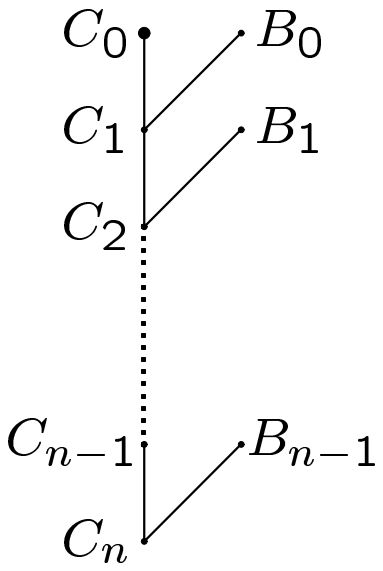
$$\frac{C_1, C_2}{RES(C_1, C_2)}.$$

Dowód rezolucyjny ze zbioru klauzul CL:
Ciąg klauzul $C_1, \ldots, C_n$ taki, że $C_n = \perp$ i dla każdego $1 \leq i \leq n$, $C_i \in CL$ lub C_i jest rezolwentą C_j i C_k, gdzie $j, k < i$.

Twierdzenie
Niech CL będzie zbiorem klauzul. CL jest niespełnialny wtw gdy istnieje dowód rezolucyjny z CL.

Rezolucja liniowa

Liniowym dowodem rezolucyjnym ze zbioru klauzul CL nazywamy dowód postaci:



gdzie:

1. $C_0 \in CL$
2. Dla $0 \leq i < n$, $B_i \in CL$ lub $B_i = C_J$, dla pewnego $j < i$.
3. Dla $1 \leq i \leq n$, C_i jest rezolwentą C_{i-1} i B_{i-1}.
4. $C_n = \bot$.

Twierdzenie
Niech CL będzie zbiorem klauzul. CL jest niespełnialny wtw gdy istnieje liniowy dowód rezolucyjny z CL.

Klauzulę C_0 w liniowym dowodzie rezolucyjnym nazywamy **klauzulą główną**.

Twierdzenie
Niech CL będzie niespełnialnym zbiorem klauzul i niech $CL' \subseteq CL$. Jeśli zbiór $CL - CL'$ jest spełnialny, to istnieje liniowy dowód rezolucyjny z CL z klauzulą główną $C_0 \in CL'$.