1 Dysjunkcyjna postać normalna

Rozważamy język logiki zdań nad skończonym zbiorem fluentów (stałych zdaniowych). Zakładamy, że rozważany język zawiera dwie stałe boolowskie T (true) i F (false).

Literałem nazywamy fluent lub jego negację. Stałe boolowskie T i F oraz dowolną koniunkcję literałów nazywamy *termem*. Formuła znajduje się w dysjunkcyjnej postaci normalnej, jeśli jest alternatywą termów.

Twierdzenie 1
Każdą formułę A można konstruktywnie przekształcić na równoważną jej formułę znajdującą się w dysjunkcyjnej postaci normalnej.

Dowód
Transformacja przebiega w trzech krokach, z których każdy zachowuje równoważność.

(1) [*Eliminacja* $\Rightarrow$ *i* $\Leftrightarrow$] Zastępuj w formule A

$$B \Rightarrow C \quad \text{przez} \quad \neg B \vee C$$
$$B \Leftrightarrow C \quad \text{przez} \quad (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)$$

tak długo, aż otrzymana formuła zawiera wyłącznie spójniki $\neg$, $\wedge$ i $\vee$.

(2) [*Przesuwanie* $\neg$ *"w głąb"*] W formule otrzymanej w kroku (1), zastępuj

$$\neg(B \vee C) \quad \text{przez} \quad \neg B \wedge \neg C$$
$$\neg(B \wedge C) \quad \text{przez} \quad \neg B \vee \neg C$$
$$\neg\neg B \quad \text{przez} \quad B$$

tak długo, aż wszystkie wystąpienia negacji występują bezpośrednio przed fluentami.

(3) [*Rozdzielanie* $\vee$ *przez* $\wedge$] W formule otrzymanej w kroku (2), zastępuj tak długo jak to jest możliwe

$$(B \vee C) \wedge D \quad \text{przez} \quad (B \wedge D) \vee (C \wedge D)$$
$$B \wedge (C \vee D) \quad \text{przez} \quad (B \wedge C) \vee (B \wedge D).$$

Mówimy, że term t_1 *absorbuje* term t_2, wtedy i tylko wtedy, gdy t_1 jest podformułą t_2. Np. term a absorbuje term $a \wedge l$. Niech α będzie formułą w dysjunkcyjnej postaci normalnej *DNF*. Przez $ABS(\alpha)$ oznaczać będziemy formułę otrzymaną w wyniku następującego procesu:

1. Powtarzaj tak długo jak to możliwe:
   jeśli α zawiera parę termów δ i γ takich, że δ absorbuje γ, to usuń γ.

Formuły α i $ABS(\alpha)$ są równoważne.

Zadanie 1
Przekształcić formułę $\exists p.\alpha$ do postaci nie zawierającej kwantyfikatora egzystencjalnego.

Algorytm 1

1. Przekształć formułę α do dysjunkcyjnej postaci normalnej β.
2. $\beta := ABS(\beta)$ $\{\beta = t_1 \vee \cdots \vee t_n.\}$
3. Powtarzaj dla $1 \leq i \leq n$:
   - zastąp w formule β term t_i termem t_i' powstałym z termu t_i przez usunięcie wszystkich wystąpień fluentu p. Jeśli t_i' jest pusty połóż $\beta := T$.
4. Zwróć β jako wynik.

Działanie algorytmu zilustrujemy przykładem.

$$\exists p.[((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \vee ((p \wedge q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r))].$$

Po pierwszym kroku algorytmu otrzymujemy (DNF):

$$\beta = \neg p \wedge q \vee p \wedge q \wedge r \vee \neg p \wedge r \vee r$$

Po drugim (ABS):

$$\beta = \neg p \wedge q \vee r$$

Po kroku trzecim mamy ostateczny wynik

$$\beta = q \vee r$$