. . . .
imię, nazwisko, numer indeksu

Egzamin z RPiS (część I, 21 lutego 2023 – 45 minut)

Zadanie 1 (1 punkt)**.** Niech $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{3}{7}$, $P(B|\Omega - A) = \frac{4}{7}$. Policz $P(A|B)$.

$P(A|B) =$ . . . .

Zadanie 2 (1 punkt)**.** Niech $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{5}$, przy czym zdarzenia A i B są niezależne. Niech $C = A \cap (\Omega - B)$.

Wówczas $P(C) =$ . . . .

Zadanie 3 (1 punkt)**.** Niech X będzie zmienną losową określającą wynik rzutu kostką sześcienną.

Wówczas funkcja tworząca $g_X(10) =$ . . . .

Zadanie 4 (3 punkty)**.** Co można powiedzieć o $P(X \geq 10)$ przy następujacych założeniach:

(a) jeśli $X \geq -2, EX = 3$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

(b) jeśli $EX = 6$, $\sigma(X) = 3$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

(b) jeśli $X \sim Binom(10, \frac{1}{2})$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

Zadanie 5 (4 punkty)**.** Czy następujące zdania są prawdziwe? Wpisz: (A) są prawdziwe zawsze, (B) są prawdziwe tylko przy założeniu niezależności parami, (C) są prawdziwe tylko przy założeniu pełnej niezależności, (D) mogą być nieprawdziwe nawet gdy założymy pełną niezależność.

$E(X - Y + Z) = EX - EY + EZ$ . . . . . .

$\mathrm{Var}(X - Y + Z) = \mathrm{Var}X - \mathrm{Var}Y + \mathrm{Var}Z$ . . . . . .

$E(XY/Z) = EX \cdot EY/EZ$ . . . . . .

$g_{X+Y+Z}(t) = g_X(t) g_Y(t) g_Z(t)$ . . . . . .

Zadanie 6 (2 punkty)**.** Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem *niezależnych* zmiennych losowych o rozkładzie Pois(2), a $Y \sim N(0,1)$. Dla jakiego $f(n)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i > f(n)) = P(Y > 1)$?

$f(n) = \ldots\ldots$

Zadanie 7 (3 punkty)**.** Dla których z następujących łańcuchów Markowa $(X_0, X_1, \ldots)$ o stanach $\{0,1,2,3\}$ istnieje taki rozkład π, że niezależnie od rozkładu X_0 mamy $\lim_{k\to\infty} P(X_k = i) = \pi_i$? Krótko uzasadnij odpowiedzi (rozwiązanie bez uzasadnienia warte jest połowę punktów).

- ze stanu k przechodzimy do stanu $(k+1) \bmod 4$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $(k-1) \bmod 4$ z prawdopodobieństwem $1/2$

  ....

- ze stanu $k = 1, 2$ przechodzimy do stanu $k-1$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $k+1$ z prawdopodobieństwem $1/2$; w stanach $k = 0, 3$ z prawdopodobieństwem 1 zostajemy w tych stanach

  ....

- ze stanu k przechodzimy do stanu $3-k$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $(k+1) \bmod 3$ z prawdopodobieństwem $1/2$

  ....

Zadanie 8 (2 punkty)**.** Niech X ma rozkład χ^2 z 1 stopniem swobody. Policz EX i wyraź $P(X \le EX)$ przy użyciu dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego Φ.

$EX = \ldots\ldots$ $\qquad$ $P(X \le EX) = \ldots\ldots$

Zadanie 9 (2 punkty)**.** Załóżmy, że X jest ciągłą zmienną losową, a $Y = e^X$. Wyraź funkcję gęstości zmiennej losowej Y przy użyciu funkcji gęstości zmiennej losowej X.

$f_Y(t) = \ldots\ldots$

Zadanie 10 (1 punkt)**.** Badacz przeprowadził test statystyczny na poziomie istotności $\alpha = 0,1$. Otrzymał p-wartość (p-value) równą 0,06. Wskaż zdanie prawdziwe:

A Uzyskane p-value było mniejsze niż założony poziom istotności, czyli badacz nie miał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu

B Skoro poziom istotności testu wynosił 0,1, to z prawdopodobieństwem 0,9 badacz odrzucał błędną hipotezę zerową

C Poziom istotności testu wynosił 0,1, czyli z prawdopodobieństwem 0,9 badacz nie odrzucał prawdziwej hipotezy zerowej

D Bez dokładnej informacji, jakie były hipotezy zerowa i alternatywna, nie możemy podać, czy były podstawy czy nie do odrzucenia hipotezy zerowej.