. . . .
imię, nazwisko, numer indeksu

Egzamin z RPiS (część I, 10 lutego 2022)

Zadanie 1 (1 punkt)**.** Niech $P(A) = \frac{1}{10}$, $P(B|A) = \frac{9}{10}$, $P(B|\Omega - A) = \frac{1}{20}$. Policz $P(A|B)$.

$P(A|B) =$ . . . .

Zadanie 2 (3 punkty)**.** Czy następujące zdania są prawdziwe? Wpisz: (A) są prawdziwe zawsze, (B) są prawdziwe tylko przy założeniu niezależności parami, (C) są prawdziwe tylko przy założeniu pełnej niezależności, (D) mogą być nieprawdziwe nawet gdy założymy pełną niezależność.

(a) $E(X + 2Y + 3Z) = EX + 2EY + 3EZ$ . . . . . .

(b) $\mathrm{Var}(X + 2Y + 3Z) = \mathrm{Var}X + 2\mathrm{Var}Y + 3\mathrm{Var}Z$ . . . . . .

(c) $P(\min(X, Y, Z) \geq 0) = P(X \geq 0)P(Y \geq 0)P(Z \geq 0)$ . . . . . .

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o funkcjach tworzących g_X, g_Y, a $P(C = 1) = P(C = 0) = \frac{1}{2}$. Zmienne losowe X, Y, C są niezależne.

Niech $A = X + 1$, $B = XC + Y(1 - C)$. Wyraź następujące funkcje tworzące (bez Σ, być może korzystając z g_X i g_Y):

(a) $g_A(t) =$ . . . .

(b) $g_B(t) =$ . . . .

(c) $g_C(t) =$ . . . .

Zadanie 4 (3 punkty)**.** Co można powiedzieć o $P(X \geq 10)$, jeśli wiemy, że:

(a) jeśli $EX = 0$, $\forall a P(X \geq a) = P(X \leq -a)$, $\sigma(X) = 2$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

(b) jeśli $E(X^4) = 16$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

(c) jeśli X ma rozkład geometryczny z parametrem $1/2$, to $P(X \geq 10) \leq$ . . . .

Zadanie 5 (3 punkty)**.** Cukiernia produkuje kolejne pączki o wadze W_1 g, W_2 g, W_3 g, ..., gdzie W_i dla każdego pączka jest losowane z rozkładu o skończonej wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Przez p_n oznaczmy prawdopodobieństwo, że waga n pączków przekroczy $n\mu + 5\sigma\sqrt{n}$. Co można powiedzieć o zbieżności ciągu p_n, jeśli:

- (a) waga każdego pączka jest niezależna i W_i ma rozkład normalny[1] ......
- (b) waga każdego pączka jest niezależna, rozkład W_i jest taki sam dla każdego pączka, ale niekoniecznie normalny ......
- (c) każdy pączek ma taką samą wagę $W_i = W$ losowaną z rozkładu normalnego ......

(możliwe odpowiedzi: (A) to ciąg stały, (B) zbieżny do 0, (C) zbieżny do 1, (D) zbieżny do 1/2, (E) zbieżny do innej wartości, (F) rozbieżny, (G) za mało informacji)

Zadanie 6 (3 punkty)**.** Dla jakiego najmniejszego n istnieje łańcuch Markowa o n stanach i zadanej własności? (Wpisz „nie ma" jeśli nie ma takiego łańcucha Markowa, ∞ lub „nieskończoność" jeśli są takie łańcuchy Markowa, ale mają nieskończenie wiele stanów.)

(a) trzy różne klasy tymczasowe: $n \geq$ ......

(b) nie ma stanu powracającego: $n \geq$ ......

(c) okresowy: $n \geq$ ......

Zadanie 7 (4 punkty)**.** Maszyna losująca ma dwa nieznane parametry: $p \in (0, 1)$ i $k \in \mathbb{N}$. Maszyna rzuca monetą (dla której prawdopodobieństwo uzyskania orła to p) do uzyskania pierwszego orła; niech N będzie liczbą uzyskanych orłów. Następnie zwraca wynik $X = Nk$. W trzech losowaniach otrzymaliśmy wyniki $X_1 = 6$, $X_2 = 12$, $X_3 = 18$.

- (a) funkcja wiarygodności to

  $L(k, p; 6, 12, 18) =$ ....

- (b) jaką wartość parametru k otrzymamy metodą największej wiarygodności?

  $\hat{k}(6, 12, 18) =$ ....

- (c) jaką wartość parametru p otrzymamy metodą największej wiarygodności? (2 punkty)

  $\hat{p}(6, 12, 18) =$ ....

[1] W tym zadaniu waga pączka może być ujemna. Pączki dla odchudzających się!