

**Zadanie 1** (10 punktów). Mamy zabawkę składającą się z trzech prętów, na które są nałożone krążki. W przeciwieństwie do wieży Hanoi Krążki są tej samej wielkości, ale różnią się kolorem. W każdym ruchu losujemy dwa różne pręty  $X$  i  $Y$  i jeśli na pręcie  $X$  jest co najmniej jeden krążek, przenosimy najwyższy krążek na pręt  $Y$ . Zabawę kończymy, gdy wszystkie trzy krążki znajdują się na tym samym pręcie.

(a) [5 pkt.] Policz wartość oczekiwaną liczby ruchów, po której wszystkie 3 krążki znajdują się na tym samym pręcie.

(b) [5 pkt.] Załóżmy, że w pierwszym ruchu został przykryty czerwony krążek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na końcu zabawy czerwony krążek będzie na szczycie otrzymanej wieży?

**Zadanie 2** (10 punktów). W zadaniu 3 na kolokwium zajmowaliśmy się analizą losowego algorytmu DFS przechodzącego po drzewie  $(V, E)$ . Algorytm zaczyna w korzeniu drzewa  $s$  i kończy działanie, gdy dojdzie do wybranego liścia  $v \in V$ . Niech  $X$  będzie liczbą wierzchołków odwiedzonych przez ten algorytm.

Rozważmy zbiór wszystkich drzew o  $n$  wierzchołkach, w których korzeń  $s$  jest ojcem wierzchołka  $t$ , który jest ojcem liścia docelowego  $v$ . W tym zbiorze szukamy takiego drzewa, w którym wariancja  $X$  jest najmniejsza.

(a) [5 pkt.] Udowodnij, że w drzewie o najmniejszej wariancji  $X$  wszystkie wierzchołki poza  $s$  i  $t$  są liśćmi.

(b) [5 pkt.] Znajdź drzewo, dla którego wariancja  $X$  jest najmniejsza (można korzystać z (a) bez zrobienia go).

**Zadanie 3** (10 punktów). Losujemy liczby  $X_1, X_2, X_3, \dots$  niezależnie z rozkładu jednostajnego na odcinku  $[0, 1]$ .

(a) [5 pkt.] Oblicz prawdopodobieństwo, że  $X_1 + X_2 + \dots + X_n < 1$ .

(b) [5 pkt.] Niech  $N$  będzie najmniejszą wartością, dla której  $X_1 + X_2 + \dots + X_N > 1$ . Oblicz  $EN$ .

**UWAGA: Zadania oddajemy przez Moodle. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia w części zadaniowej należy uzasadnić.**