

Zadania domowe z GAL I — seria A (termin: 2 II)

1. Niech

$$V = \text{lin}((1, 1, 3, 2), (4, 5, 2, 5), (2, 3, -4, 1), (1, 2, -5, 5))$$

a) Znajdź bazę i wymiar V .

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni \mathbb{R}^4 taka, że $\alpha_1 \in V$, $\alpha_1 + 2\alpha_3 \in V$ oraz wektor $\beta = (1, 1, 3, 3)$ ma w tej bazie współrzędne $(0, t, 1, 0)$? Dla każdego takiego t podaj odpowiedni przykład.

2. Niech

$$V = \text{lin}((1, 2, 2, 3), (1, -1, 1, -1), (2, 1, 3, t+2)),$$
$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = s - 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + (s^2 - 1)x_4^2 = 0 \end{cases}$$

a) Opisz podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^4$ układem równań liniowych.

b) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ zbiór W jest podprzestrzenią liniową \mathbb{R}^4 ? Dla każdego takiego s znajdź bazę W .

3. Niech

$$V = \text{lin}((1, 2, 1, 3), (3, 5, 2, 4), (1, 3, t, 8)),$$
$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + sx_4 = 0 \end{cases}$$

a) W zależności od wartości $s, t \in \mathbb{R}$ znajdź bazy przestrzeni $V + W$ oraz $V \cap W$.

b) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$?

4. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane warunkami

$$\varphi((1, 1)) = (2, 1, 3), \quad \varphi((1, 2)) = (4, 2, t).$$

a) Znajdź wzór na φ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\mathcal{A}: (3, 2), (1, 2), \quad \mathcal{B}: (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1).$$

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $\text{im } \psi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$ oraz $\ker(\psi \circ \phi) = \{(0, 0)\}$? Dla każdego takiego t podaj odpowiedni przykład.

5. Niech

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4),$$
$$Z = \{\psi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \mid \psi \circ \varphi = 0, \text{ im } \psi \subseteq \text{lin}((1, 0, 0), (1, 2, 2))\}$$

a) Znajdź bazę $\text{im } \varphi$.

b) Znajdź wymiar przestrzeni Z .

c) Podaj przykład $\psi \in Z$ takiego, że ψ jest rzędu 1.

6. Niech

$$\mathcal{A}: (1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 2), \quad \mathcal{B}: (1, 1), (1, 2),$$
$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(\psi)_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź $M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}}$. Znajdź współrzędne $\varphi(\alpha)$ w bazie \mathcal{B} , jeśli $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3$ (α_i oznaczają kolejne wektory z bazy \mathcal{A}).

b) Znajdź wymiar jądra oraz bazę obrazu $\varphi \circ \psi$.

7. Niech

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - x_3),$$
$$\mathcal{A}: (3, 4, 5), (1, 3, -2), (0, 1, -2), \quad \mathcal{B}: (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$$

a) Oblicz $M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$.

b) Znajdź współrzędne $\varphi^*(\varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)$ w bazie \mathcal{A}^* .

c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje $\psi \in \ker \varphi^*$ takie, że $\ker \psi = \text{lin}((1, 3, 2), (2, -4, t))$?

8. Niech $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} s & s & s & \dots & s & s \\ s & 1 & s & \dots & s & s \\ s & s & 2 & \dots & s & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s & s & s & \dots & n-1 & s \\ s & s & s & \dots & s & n \end{bmatrix}$$

a) Zakładając, że $s = n + 1$, oblicz $\det A$. Wykaż, że w takiej sytuacji A jest odwracalna.

b) Czy może się zdarzyć, że $s = 4n$ oraz $\det A = 26 \cdot 3^5$?

9. Niech V, W będą (niekoniecznie skończenie wymiarowymi) przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\varphi: V \rightarrow W$, $\psi: W \rightarrow V$ będą przekształceniami liniowymi.

a) Udowodnij, że jeśli $V' \subseteq V$ jest podprzestrzenią taką, że $\varphi|_{V'}$ jest monomorfizmem oraz $\varphi(V') = \varphi(V)$, to $V = V' \oplus \ker \varphi$.

b) Udowodnij, że jeśli $\varphi \circ \psi$ jest izomorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$.

10. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie górnotrójką i taka, że $A^n = 0$. Udowodnij, że $\det(A+I) = 1$.