

## Zadania domowe z GAL I — seria 9 (termin: 18 I)

1-3. Patrz zadania nr 1-3 na liście wykładowcy (kliknij link):

[http://www.mimuw.edu.pl/~stroa/Gal1\\_12/Gal\\_Zadania\\_Seria\\_9.pdf](http://www.mimuw.edu.pl/~stroa/Gal1_12/Gal_Zadania_Seria_9.pdf)

4. Niech  $V = V_1 \oplus V_2$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$  i niech  $F$  będzie rzutem na  $V_1$  wzdłuż  $V_2$ . Udowodnij, że  $F^*$  również jest rzutem (na pewną podprzestrzeń  $V^*$ , wzdłuż pewnej podprzestrzeni  $V^*$ ).

5. W przestrzeni liniowej  $V$  rozważamy (być może nieskończoną) bazę

$$\mathcal{A}: \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots \in V,$$

zaś w przestrzeni sprzężonej  $V^*$  — dualny do niej układ funkcyjałów

$$\mathcal{A}^*: \quad \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots \in V^*$$

zdefiniowanych tradycyjnie wzorami

$$\alpha_i^*(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Jak nam dobrze wiadomo z wykładu, jeśli  $\dim V < \infty$ , to  $\mathcal{A}^*$  jest bazą  $V^*$ . Udowodnij, że jeśli  $\dim V = \infty$ , to układ  $\mathcal{A}^*$  jest niezależny, ale nie rozpiną  $V^*$ .

(Wskazówka: Dowolny funkcyjał w  $\text{lin } \mathcal{A}^*$  może “lubić się” jedynie ze skończenie wieloma wektorami z  $\mathcal{A}$ .)