Praca domowa - seria 8

9 stycznia 2013

Zadanie 1.

Niech $f \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^4)$ i $g \in L(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^3)$ mają następujące macierze w bazach standardowych:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 15 \\ 0 & -7 & -12 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad M(g) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Opisz $\ker(f \circ g)$ układem równań.

b) Napisz wzór analityczny przekształcenia $(g \circ f)^{-1}$.

Rozwiązanie. *Ad a)*

Sposób I

Jądro $f \circ g$ jest opisane przez następujący układ równań:

$$M(f \circ g) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Macierz przekształcenia liniowego będącego złożeniem dwóch innych przekształceń liniowych jest otrzymana z pomnożenia macierzy tych przekształceń.

$$M(f \circ g) = M(f)M(g) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 15 \\ 0 & -7 & -12 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 9 & 11 & 0 \\ 1 & 36 & 60 & 23 \\ 0 & -26 & -45 & -19 \\ 0 & 15 & 26 & 11 \end{bmatrix}$$

Stąd jądro przekształcenia $f \circ g$ opisuje następujący układ równań:

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 + 11x_3 = 0 \\ x_1 + 36x_2 + 60x_3 + 23x_4 = 0 \\ -26x_2 - 45x_3 - 19x_4 = 0 \\ 15x_2 + 26x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>Sposób II</u>
Zauważmy, że przekształcenie f jest różnowartościowe. Wynika to z faktu, że rząd macierzy tego przekształcenia jest maksymalny (równy 3). Zatem w szczególności $f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (*). Czyli wystarczy znaleźć $\ker g$, ponieważ

$$(f \circ g)(w) = 0 \Leftrightarrow f(g(w)) = 0 \Leftrightarrow g(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker g$$

Przedostatnie przejście wynika z (*).
Układ opisujący $\ker g = \ker(f \circ g)$ (otrzymany tak samo jak powyżej, ale przez pomnożenie przez macierz $M(g)$):

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Łatwo można sprawdzić, że oba układy równań są równoważne.

Ad b)
Wzór analityczny można łatwo odczytać znając macierz przekształcenia. Aby ją uzyskać, należy obliczyć $M(g \circ f) = M(g)M(f)$, po czym odwrócić otrzymaną macierz.

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 15 \\ 0 & -7 & -12 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Odwracamy $M(g \circ f)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Stąd

$$M((g \circ f)^{-1}) = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

W efekcie:

$$(g \circ f)^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (-6x_1 - 2x_2 - x_3, 5x_1 + 2x_2 + x_3, -3x_1 - x_2 - x_3).$$

Zadanie 2.

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na przestrzeń
$V = \text{lin}\,(1, 2, 1)$ wzdłuż $W : \{6x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$.

a) Napisz macierz f w bazach standardowych i wzór analityczny.

b) Wylicz $S(e_3)$, gdzie $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem V wzdłuż W.

Rozwiązanie. *Znajdziemy bazę W.*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) \in W \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, -6x_1 + 4x_2) \\ &= x_1(1, 0, -6) + x_2(0, 1, 4) \quad \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}\end{aligned}$$

Bazę W stanowią wektory $(1, 0, -6)$ i $(0, 1, 4)$. Oczywiście wraz z $(1, 2, 1)$ stanowią bazę $\mathbb{R}^3$. Z definicji f wiemy, że

$$\begin{aligned} f((1, 2, 1)) &= (1, 2, 1) \\ f((1, 0, -6)) &= (0, 0, 0) \\ f((0, 1, 4)) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

<u>Sposób I</u>
Powyższe informacje zakodujemy w macierzy:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Wykonując operacje elementarne na wierszach tak, aby otrzymać po lewej stronie macierz jednostkową, uzyskamy informację o tym jakie wartości przekształcenie f przyjmuje na wektorach bazy standardowej.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Zatem

$$\begin{aligned} & f((x_1,x_2,x_3)) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) = \\ & = x_1(-6,-12,-6) + x_2(4,8,4) + x_3(-1,-2,-1) = \\ & = (-6x_1 + 4x_2 - x_3, -12x_1 + 8x_2 - 2x_3, -6x_1 + 4x_2 - x_3) \end{aligned}$$

<u>Sposób II</u>
Wiemy, że

$$M(f)_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}$$

oraz na podstawie wcześniejszych wyliczeń, że dla bazy $\mathcal{A} = \{(1,2,1),(1,0-6),(0,1,4)\}$

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz zmiany bazy:

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Natomiast $M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}} = (M(id)_{\mathcal{A}}^{st})^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -7 & 2 \end{array}\right]$$

Mnożąc uzyskane macierze otrzymamy wynik identyczny z tym z części pierwszej.

Ad b)

$S(e_3) = f(e_3) + (f(e_3) - e_3) = 2f(e_3) - e_3 = 2(-1,-2,-1) - (0,0,1) = (-2,-4,-3)$.

Powyższy wzór łatwo wyprowadzić z definicji rzutu i symetrii.

Zadanie 3.

Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym opisanym w bazach standardowych macierzą:

$$M(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -5 & -14 \end{bmatrix}.$$

a) Znajdź bazy $\ker\phi$ i $\operatorname{im}\phi$.

b) Niech $W = \operatorname{lin}(1,0,1),(1,1,2)$. Opisz układem równań liniowych przeciwobraz tej przestrzeni, czyli $\phi^{-1}(W)$.

Rozwiązanie. *Ad a)*

Baza $\ker\phi$

Rozwiązujemy układ równań otrzymany tak, jak w Zadaniu 1. Jego macierzą jest macierz przekształcenia.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -5 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 - 8x_4 \\ x_2 = 2x_3 + 2x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Baza $\ker\phi$*:* $\{(-5,2,1,0),(-8,2,0,1)\}$.

Baza $\operatorname{im}\phi$

Wektory stojące w kolumnach macierzy ϕ rozpinają $\operatorname{im}\phi$. *Znajdziemy bazę doprowadzając do postaci schodkowej macierz, której wierszami są te wektory.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

Łatwo zauważyć, że baza $\operatorname{im}\phi$ *składa się z dwóch wektorów, np.* $\{(1,1,-3),(0,-1,1)\}$.

Ad b)

Opiszemy W *za pomocą układu równań:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Wektor $(x_1, x_2, x_3) \in W$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowo zależny z wektorami bazy* W*, czyli gdy* $x_3 - x_1 - x_2 = 0$*, równoważnie* $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$*. Zatem jest to równanie opisujące* W*.*
Wektory należące do $\operatorname{im}\phi$ *są postaci:*

$$M(\phi)(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_1{+}2x_2{+}x_3{+}4x_4, x_1{+}x_2{+}3x_3{+}6x_4, -3x_1{-}5x_2{-}5x_3{-}14x_4).$$

Aby taki wektor należał do W*, jego współrzędne muszą spełniać równanie opisujące* W*. Czyli musi zachodzić:*

$$\begin{aligned} &-(x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4) - (x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4) + (-3x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 14x_4) = 0 \\ &-5x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 24x_4 = 0 \end{aligned}$$

Ostatnie równanie opisuje szukaną przestrzeń $\phi^{-1}(W)$

Zadanie 4.(choinka z gwiazdką)

Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $\mathbb{R}^6$, zaś $\mathcal{B}$ będzie bazą $\mathbb{R}^7$. Znajdź wymiar przestrzeni przekształceń liniowych $\phi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$, spełniających (równocześnie) warunki:

$$\begin{aligned} \phi(lin(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)) &\subseteq lin(\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6), \\ \phi(lin(\alpha_1, \alpha_5)) &\subseteq lin(\beta_5, \beta_6), \\ \phi(\alpha_6) &\in lin(\beta_1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie. *Rozważmy wszystkie takie przekształcenia liniowe* ϕ*, dla których*

$$\alpha_1 \xrightarrow{\phi} x \cdot \beta_5 + y \cdot \beta_6,\ x, y \in \mathbb{R}$$

natomiast pozostałe wektory z bazy $\mathcal{A}$ *są przekształcane na zero. Przestrzeń takich przekształceń* V_1 *jest przestrzenią liniową, gdyż przekształcenia* ϕ *są liniowe. Bazą przestrzeni* V_1 *są przekształcenia* ϕ_1 *i* ϕ_2 *takie, że* $\phi_1(\alpha_1) = \beta_5$, $\phi_2(\alpha_1) = \beta_6$*. Zatem* $\dim V_1 = 2$*. Zauważmy ponadto, że przekształcenia z przestrzeni* V_1 *spełniają założenia zadania.*

Podobnie określimy przestrzeń przekształceń dla każdego wektora z bazy $\mathcal{A}$:

$$
\begin{aligned}
&V_1\colon \quad \alpha_1 \xrightarrow{\phi} x\cdot\beta_5 + y\cdot\beta_6, \quad \dim V_1 = 2;\\
&V_2\colon \quad \alpha_2 \xrightarrow{\phi} x\cdot\beta_3 + y\cdot\beta_4 + z\cdot\beta_5 + w\cdot\beta_6, \quad \dim V_2 = 4;\\
&V_4\colon \quad \alpha_4 \xrightarrow{\phi} x\cdot\beta_3 + y\cdot\beta_4 + z\cdot\beta_5 + w\cdot\beta_6, \quad \dim V_4 = 4;\\
&V_5\colon \quad \alpha_5 \xrightarrow{\phi} x\cdot\beta_5 + y\cdot\beta_6, \quad \dim V_5 = 2;\\
&V_6\colon \quad \alpha_6 \xrightarrow{\phi} x\cdot\beta_1, \quad \dim V_6 = 1\\
&\textit{(wszędzie } x, y, z, w \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

W założeniu zadania nie mamy ograniczeń na obraz wektora α_3, zatem przestrzeń przekształceń V_3 odpowiadająca temu wektorowi jest przestrzenią wszystkich przekształceń liniowych, w których obrazem α_3 jest dowolny wektor z $\mathbb{R}^7$, natomiast (tak samo jak w przypadku pozostałych przestrzeni) wszystkie inne wektory z bazy $\mathcal{A}$ są przekształcane na zero. Zatem $\dim V_3 = 7$.

Zauważmy, że przestrzeń przekształceń liniowych $\phi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$ równocześnie spełniających warunki zadania jest sumą przestrzeni V_1, $V_2, \ldots, V_6$ (to wynika ze sposobu, w jaki te przestrzenie zostały zdefiniowane oraz z tego, że rozważamy przekształcenia liniowe). Ponadto jest to suma prosta. Łatwo się o tym przekonać, zakładając, że istnieje $f \in V_1 \cap V_2 \cap \ldots V_6$, $f \neq 0$ (to znaczy, że f nie jest przekształceniem zerowym). W szczególności wówczas $f \in V_1$ oraz $f \in V_2$. Ale jeśli $f \in V_1$, to $f(\alpha_2) = 0$. Jeśli $f \in V_2$, to $f(\alpha_1) = 0$. Pozostałe wektory z bazy $\mathcal{A}$ z definicji przestrzeni V_1 i V_2 są przekształcane na zero. Zatem $f = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $f \neq 0$. Co kończy dowód, że przestrzenią przekształceń liniowych spełniających warunki zadania jest $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_6$. Wymiar tej przestrzeni:

$$\dim V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_6 = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_6 = 20.$$

Zadanie 5.

Podaj przykład przekształcenia liniowego $\phi\colon V \to V$ takiego, że

$$\phi \circ \phi \circ \phi = \phi \circ \phi \neq \phi.$$

Rozwiązanie. *Niech układ wektorów v_1, $v_2, \ldots$ będzie pewną bazą przestrzeni V. W tej bazie określmy przekształcenie ϕ wzorem:*

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, x_1, 0, 0, \ldots).$$

Wówczas

$$\phi \circ \phi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) = \phi(0, x_1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$$

oraz

$$\phi \circ \phi \circ \phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, 0, \ldots).$$

Zatem $\phi \circ \phi \circ \phi = \phi \circ \phi \neq \phi$.