Rozwiązania, seria 7.

28 grudnia 2012

Zadanie 1.

Niech $\phi \in L(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4)$. Wykaż, że jeżeli dla dowolnych dwóch przekształceń $\lambda, \psi \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$ z równości $\phi \circ \lambda = \phi \circ \psi$ wynika $\lambda = \psi$, to ϕ jest izomorfizmem.

Rozwiązanie. Udowodnimy, że ϕ jest izomorfizmem, jeśli wykażemy, że jest różnowartościowe i "na".

Załóżmy, że ϕ nie jest różnowartościowe. Wówczas $\ker\phi \neq \{0\}$, czyli istnieje $\alpha \in \mathbb{R}^4$, $\alpha \neq 0$ takie, że $\phi(\alpha) = 0$.
Rozważmy przekształcenie $\lambda \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$ określone na bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jako

$$\lambda([1,0,0]) = \alpha,\ \ \lambda([0,1,0]) = 0,\ \ \lambda([0,0,1]) = 0.$$

Natomiast $\psi \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$ będzie tożsamościowo równe zeru:

$$\psi(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Dla tak określonych λ i ψ mamy

$$\phi \circ \lambda(x) = \phi \circ \psi(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

To wynika z liniowości przekształceń ϕ, λ i ψ. Skoro $\psi \equiv 0$, zaś ϕ jest liniowe, to także $\phi \circ \psi \equiv 0$. Natomiast $\phi \circ \lambda(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^3$, dlatego że

- jeśli $x \neq a \cdot [1,0,0]$ dla $a \in \mathbb{R}$, to $\lambda(x) = 0$ i z liniowości ϕ dostajemy $\phi \circ \lambda(x) = \phi(0) = 0$;
- jeśli $x = a \cdot [1,0,0]$, to z liniowości mamy

$$\phi \circ \lambda(x) = \phi(a \cdot [1,0,0]) = a \cdot \phi([1,0,0]) = 0.$$

Zatem $\phi \circ \lambda = \phi \circ \psi$, więc z założenia $\lambda = \psi$. W szczególności mamy

$$\alpha = \lambda([1,0,0]) = \psi([1,0,0]) = 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem $\alpha \neq 0$.
Czyli przekształcenie ϕ jest różnowartościowe, a zatem $\ker\phi = \{0\}$, w szczególności $\dim\ker\phi = 0$.
Aby wykazać, że ϕ jest "na", skorzystamy z faktu z wykładu:

Fakt. Załóżmy, że $f\colon V \to W$ jest liniowym przekształceniem. Wówczas $\dim V = \dim \ker f + \dim Imf$.

Mamy $\dim \mathbb{R}^4 = dim \ker \phi + \dim Im\phi = 0 + \dim Im\phi$. Zatem $\dim Im\phi = \dim \mathbb{R}^4$, a ponieważ $Im\phi \subset \mathbb{R}^4$, to musi być $Im\phi = \mathbb{R}^4$, czyli ϕ jest "na".

Zadanie 2.

Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykaż, że jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ jest taką bazą V, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest bazą $\ker f$, to $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_s)$ jest bazą Imf.

Rozwiązanie. Ponieważ f jest liniowe, to $\dim V = \dim \ker f + \dim Imf$. Skoro $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest bazą $\ker f$, to $\dim \ker f = n$. Zatem $\dim Imf = s$ i jeśli wskażemy dowolny podzbiór s wektorów z Imf, który rozpina Imf, to będzie on bazą obrazu.

Niech $\gamma \in Imf$. Wówczas dla pewnego $v \in V$ zachodzi $f(v) = \gamma$. Możemy zapisać v we współrzędnych bazy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$:

$$v = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + b_s\beta_s.$$

Skąd dostajemy, że

$$\begin{aligned}\gamma = f(v) &= f(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + \ldots + b_s\beta_s) \text{ z liniowości } f\\ &= a_1 f(\alpha_1) + \cdots + a_n f(\alpha_n) + b_1 f(\beta_1) + \ldots + b_s f(\beta_s) \text{ ponieważ}\\ &\quad \text{wektory } \alpha \text{ są bazą } \ker f\\ &= 0 + \cdots + 0 + b_1 f(\beta_1) + \ldots + b_s f(\beta_s)\end{aligned}$$

Zatem układ $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_s)$ rozpina przestrzeń Imf i jest s-elementowy, a więc jest bazą Imf.

Zadanie 3.

Niech $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie zadane wzorem:

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 3x_2 + 7x_3, -x_1 + x_2 + tx_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3).$$

Oblicz dla jakich wartości parametru t przekształcenie f_t jest monomorfizmem.

Rozwiązanie. Zapiszmy macierz $M(f_t)$ przekształcenia f_t i sprowadźmy ją do postaci schodkowej:

$$M(f_t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & t \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{III+I}{\overset{II-I}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & t+4 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \underset{III-3\cdot II}{\overset{IV+2\cdot II}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & t-5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem dla $t \neq 5$ wymiar obrazu jest 3, a więc f_t jest monomorfizmem (gdyż wymiar dziedziny jest również 3, czyli jądro jest wymiaru 0).

Zadanie 4.

Wiadomo, że

$$\mathcal{B}: \qquad (1,-3,1), \quad (-1,2,0), \quad (1,0,-3),$$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Czy na podstawie tych informacji można wyznaczyć bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$? Jeśli którąś z nich można wyznaczyć, zrób to; w przeciwnym razie uzasadnij (np. podając odpowiednie przykłady), że jest to niemożliwe.

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę, że wektory ze zbioru $\mathcal{B}$ są liniowo niezależne, więc rzeczywiście tworzą bazę $\mathbb{R}^3$.

Wprowadźmy oznaczenie na wektory z rozważanych baz:

$$\mathcal{A}: \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3; \qquad \mathcal{C}: \qquad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3.$$

Wektory z bazy $\mathcal{B}$ będziemy oznaczać odpowiednio jako $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Używając macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$ obliczmy, wartości przekształcenia ϕ na wektorach z bazy $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}: \qquad \phi(\alpha_1) =& \beta_1 + \beta_3 = (2,-3,-2), \\ \phi(\alpha_2) =& -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ =& (-1,3,-1) + (-1,2,0) + (2,0,-6) \\ =& (0,5,-7), \\ \phi(\alpha_3) =& \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \\ =& (1,-3,1) + (1,-2,0) + (-1,0,3) \\ =& (1,-5,4); \\ M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}: \qquad \phi(\alpha_1) =& \gamma_2 + 3\gamma_3, \\ \phi(\alpha_2) =& \gamma_3, \\ \phi(\alpha_3) =& \gamma_1 + 3\gamma_3. \end{aligned}$$

Z powyższych równości wynika, że

$$\begin{cases} \gamma_2 + 3\gamma_3 = (2,-3,-2), \\ \gamma_3 = (0,5,-7), \\ \gamma_1 + 2\gamma_3 = (1,-5,4), \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_1 &= (1,-15,18), \\ \gamma_2 &= (2,-18,19), \\ \gamma_3 &= (0,5,-7). \end{aligned}$$

W ten sposób znaleźliśmy bazę $\mathcal{C}$.

Aby udowodnić, że bazy $\mathcal{A}$ nie można wyznaczyć, rozważmy przypadek, gdy $\mathcal{A}$ jest bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{A} = st$), bazy $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{\mathcal{B}}$ i $M(\phi)_{st}^{\mathcal{C}}$ są takie, jak w założeniach zadania. Jeśli e_1, e_2, e_3 jest bazą standardową $\mathbb{R}^3$, to poprzez $\frac{st}{2}$ oznaczymy bazę $\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Prawdziwy jest wówczas ciąg równości:

$$\begin{aligned}
M(\phi)_{st}^{\mathcal{B}} =& M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \\
=& M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot M(\phi)_{st}^{st} \\
=& M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{\frac{st}{2}}^{st} \cdot 2 \cdot M(\phi)_{st}^{st} \\
=& M(id)_{\frac{st}{2}}^{\mathcal{B}} \cdot 2 \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\
=& M(id)_{\frac{st}{2}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\frac{st}{2}}^{\frac{st}{2}} \cdot 2, \text{ gdyż } M(\phi)_{st}^{st} = M(\phi)_{\frac{st}{2}}^{\frac{st}{2}} \\
=& 2 \cdot M(\phi)_{\frac{st}{2}}^{\mathcal{B}} \\
=& M(2\phi)_{\frac{st}{2}}^{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z równości:

$$M(\phi)_{\frac{st}{2}}^{\frac{st}{2}} = M(id)_{st}^{\frac{st}{2}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\frac{st}{2}}^{st} = 2 \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot \frac{1}{2} = M(\phi)_{st}^{st}.$$

Stąd $M(\phi)_{st}^{\mathcal{B}} = M(2\phi)_{\frac{st}{2}}^{\mathcal{B}}$, ale $\phi \neq 2\phi$ (o ile $\phi \not\equiv 0$) oraz $st \neq \frac{st}{2}$. Zatem dla różnych przekształceń ϕ baza $\mathcal{A}$ może wyglądać inaczej, a założenia zadania nadal będą spełnione.

Zadanie 5.

Niech $\psi \colon \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ będzie rzędu r. Udowodnij, że istnieją bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ takie, że $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zawiera r jedynek na przekątnej wychodzącej z lewego górnego rogu, a oprócz tego same zera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & & 0 & \\
 & \ddots & & 0 \\
0 & & 1 & \\
\hline
 & & & \\
 & 0 & & 0 \\
 & & &
\end{array}\right)$$

Rozwiązanie. Rozważmy dowolną bazę $\mathcal{A} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a)$ przestrzeni $\mathbb{R}^a$. Z wykładu wiemy, że układ $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), \ldots, \psi(\alpha_a)$ rozpina $im(\psi)$. Z założenia przekształcenie ψ jest rzędu r, czyli $\dim im(\psi) = r$, a więc bez straty ogólności możemy zakładać, że pierwsze r wektorów $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), \ldots, \psi(\alpha_r)$ stanowią bazę $im(\psi)$. Wówczas wektory $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_a$ są bazą $\ker(\psi)$ i z definicji jądra przekształcenia ich obrazem jest 0. Uzupełnijmy układ $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), \ldots, \psi(\alpha_r)$ dowolnie do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^b$ i niech to będzie baza $\mathcal{B}$. Zobaczmy, jak przekształcenie ψ zachowuje się na tak określonych bazach:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\to \psi(\alpha_1) + 0 + \ldots + 0 \\
\alpha_2 &\to 0 + \psi(\alpha_2) + \ldots + 0 \\
&\ldots \\
\alpha_r &\to 0 + \ldots + 0 + \psi(\alpha_r) + 0 + \ldots + 0 \\
\alpha_{r+1} &\to 0 + \ldots + 0 \\
&\ldots \\
\alpha_a &\to 0 + \ldots + 0
\end{aligned}
$$

Czyli macierz przekształcenia ψ wygląda dokładnie tak, jak w wymaganiach zadania.