Praca domowa - seria 6

28 grudnia 2012

Zadanie 1.

Znajdź bazę jądra i obrazu przekształcenia liniowego $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+2x_2-x_3+3x_4, x_1+x_2+2x_3+x_4, 2x_1+3x_2+x_3+4x_4).$$

Rozwiązanie. Jądro ϕ
Szukamy takich wektorów, które są przekształcane w wektor zerowy. Zatem musimy rozwiązać następujący układ równań.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Zapisujemy macierz współczynników i sprowadzamy ją do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_1 - w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -w_1 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_1 = -5x_3 + x_4 \end{cases}$$

Stąd wektory należące do przestrzeni rozwiązań, czyli $\ker \phi$, można opisać następująco:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5x_3+x_4, 3x_3-2x_4, x_3, x_4) = x_3(-5, 3, 1, 0)+x_4(1, -2, 0, 1).$$

Czyli bazą $\ker\phi$ jest np. układ $\mathcal{A} = \{(-5,3,1,0),(1,-2,0,1)\}$.

Obraz ϕ

Korzystamy z następującego faktu:

Stwierdzenie. *Niech $\phi : V \to W$ oraz $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ będzie bazą V. Wtedy układ $\{\phi(\alpha_1), ..., \phi(\alpha_n)\}$ rozpina przestrzeń* $\operatorname{im}\phi$.

Weźmy bazę $\mathbb{R}^4$ złożoną z wektorów e_1, e_2, e_3, e_4.

$$\begin{aligned}\phi((1,0,0,0)) &= (1,1,2)\\ \phi((0,1,0,0)) &= (2,1,3)\\ \phi((0,0,1,0)) &= (-1,2,1)\\ \phi((0,0,0,1)) &= (3,1,4)\end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{im}\phi = \operatorname{lin}\{(1,1,2),(2,1,3),(-1,2,1),(3,1,4)\}.$$

Szukamy bazy sprowadzając do postaci schodkowej macierz, w której wierszach znajdują się powyższe wektory:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ -2w_1\\ +w_1\\ -3w_1\end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

Łatwo można zauważyć, że szukaną bazą jest np. układ $\{(1,1,2),(0,1,1)\}$.

Zadanie 2.

Znajdź wzór analityczny przekształcenia liniowego
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takiego, że $(1,2,3,1) \in \ker f$, $(1,5,4,1) \in \ker f$, $(1,1,2) \in \operatorname{im} f$, $(7,5,0) \in \operatorname{im} f$.

Rozwiązanie. Przekształcenie liniowe jest jednoznacznie zdefiniowane poprzez wyznaczenie wartości na dowolnej bazie przestrzeni będącej dziedziną przekształcenia. Zauważmy, że $(1,2,3,1), 1,5,4,1)$ są liniowo niezależne i skoro należą do $\ker f$, to

$$\begin{aligned}f((1,2,3,1)) &= (0,0,0)\\ f((1,5,4,1)) &= (0,0,0)\end{aligned}$$

Pozostaje dobrać dwa wektory tak, aby wraz z $(1,2,3,1), 1,5,4,1)$ stanowiły bazę $\mathbb{R}^4$. Weźmy e_3 i e_4 oraz niech

$$f((0,0,1,0)) = (1,1,2)$$
$$f((0,0,0,1)) = (7,5,0).$$

Tworzymy macierz złożoną z macierzy 4x4, w wierszach której zapisujemy wektory wybranej bazy $\mathbb{R}^4$ oraz macierzy 4x3, w wierszach której zapisujemy odpowiednio wartości przekształcenia na wektorach z poprzedniej macierzy.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Wykonujemy operacje elementarne na wierszach, jednocześnie dla obu macierzy, tak, aby otrzymać macierz jednostkowa po lewej stronie. Wtedy dowiemy się jakie wartości przekształcenie f przyjmie na wektorach jednostkowych, co umożliwi zapisanie wzoru analitycznego.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -w_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -w_4 - 3w_3 \\ -w_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -10 & -8 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{3}w_2 \\ :3 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -9\frac{2}{3} & -7\frac{2}{3} & -5\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem

$$f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) + x_4 f(e_4) =$$
$$= x_1 \left(-9\frac{2}{3}, -7\frac{2}{3}, -5\frac{1}{3}\right) + x_2 \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + x_3(1,1,2) + x_4(7,5,0) =$$
$$= \left(-9\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 + 7x_4, -7\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 + 5x_4, -5\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 2x_3\right)$$

Zadanie 3.

Znajdź liczbę przekształceń liniowych $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ spełniających warunki: $f((1,1,2)) = (2,1)$, $f((2,3,r)) = (2,3)$ i $f((3,r,8)) = (2,5)$.

Rozwiązanie. Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu. Tworzymy macierz analogiczną do tej z poprzedniego zadania i poprzez operacje elementarne na wierszach doprowadzamy lewą macierz do postaci schodkowej.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & r & 2 & 3 \\ 3 & r & 8 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ -3w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & r-4 & -2 & 1 \\ 0 & r-3 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -(r-3)w_2 \end{array} \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & r-4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -(r-2)(r-5) & 2(r-5) & 5-r \end{array}\right]$$

Zauważmy, że dla $r \neq 2$ i $r \neq 5$ wektory znajdujące się w wierszach lewej macierzy stanowią bazę. Zatem dla każdego takiego r przekształcenie jest jednoznacznie wyznaczone.
Dla $r = 2$ ostatni wiersz połączonych macierzy przyjmuje postać:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right]$$

Czyli musiałoby zachodzić $f((0,0,0)) = (-6,3)$. Ale wiemy, że dla dowolnego przekształcenia liniowego ϕ wektor zerowy należy do $\ker \phi$. Zatem nie istnieje takie przekształcenie liniowe.
Dla $r = 5$ w ostatnim wierszu otrzymujemy same zera, zatem f jest przekształceniem liniowym. Do pełnej definicji brakuje określenia f na trzecim wektorze bazy. Dla ustalonego wektora wartość przekształcenia można dobrać na nieskończenie wiele sposobów (continuum).
Reasumując:

- $r \neq 2$ i $r \neq 5$: jedno przekształcenie liniowe
- $r = 2$: zero przekształceń liniowych
- $r = 5$: nieskończenie wiele (continuum) przekształceń liniowych.

Zadanie 4.

Niech $V_1, V_2 \subseteq V$, przy czym $\dim V = 5$, $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 4$, $V = V_1 + V_2$. Niech $\phi\colon V \to \mathbb{R}^5$ będzie liniowe, przy czym $\dim \phi(V_1) = \dim \phi(V_2) = 2$. Podaj wszystkie możliwe wartości $\dim \phi(V)$. Dla każdej z nich opisz przykład takiej sytuacji (np. biorąc $V = \mathbb{R}^5$ i podając bazy V_1, V_2 oraz wzór na ϕ).

Rozwiązanie. Zaczniemy od tego, że wybierzemy jakąś wygodną bazę przestrzeni V. Używając informacji o wymiarach, możemy obliczyć, że

$$\dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V = 3 + 4 - 5 = 2.$$

Zatem jeśli α_1, α_2 są układem liniowo niezależnych wektorów z $V_1 \cap V_2$ (baza $V_1 \cap V_2$), to można uzupełnić go do bazy przestrzeni V_1 wektorem $\beta \in V_1$ (gdyż $\dim V_1 = 3$) oraz do bazy przestrzeni V_2 wektorami γ_1, $\gamma_2 \in V_2$. Ponieważ $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, to wektory α_1, α_2, β, γ_1, γ_2 są liniowo niezależne (wynika z konstrukcji tych wektorów). Zauważmy, że jest to baza przestrzeni V, gdyż ten układ jest układem pięciu liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni 5- wymiarowej. Zatem mamy:

$$\begin{aligned} V &= lin\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2\}, \\ V_1 &= lin\{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}, \\ V_2 &= lin\{\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2\}. \end{aligned}$$

Określmy przekształcenie ϕ na bektorach bazowych tak, żeby $\dim \phi(V_1) = \dim \phi(V_2) = 2$:

- Załóżmy, że α_1, $\alpha_2 \notin \ker \phi$. Ponieważ $\dim \phi(V_1) = 2$ oraz znaleźliśmy dwa liniowo niezależne wektory w dziedzinie, które nie należą do jądra, to układ $\phi(\alpha_1)$, $\phi(\alpha_2)$ stanowi bazę $\phi(V_1)$, czyli musi być $\phi(\beta) = 0$.

  Podobnie rozumując w przypadku $\phi(V_2)$ dostajemy, że $\phi(\gamma_1) = \phi(\gamma_2) = 0$. Przekształcenie ϕ jest określone na wektorach z bazy tak, że $\dim \phi(V) = 2$.

  Na przykład niech $V = \mathbb{R}^5$ z bazą standardową. Natomiast $V_1 = lin\{e_1, e_2, e_3\}$, $V_2 = lin\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$. Przekształcenie $\phi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ możemy określić wzorem:

  $$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, 0, 0, 0).$$

  W oczewisty sposób $\dim \phi(\mathbb{R}^5) = 2$.

- Załóżmy, że $\alpha_1 \notin \ker \phi$, zaś $\phi(\alpha_2) = 0$ (czyli $\alpha_2 \in \ker \phi$). Ponieważ przestrzeń $\phi(V_1)$ ma wymiar 2 i jest rozpięta przez układ $\{\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2) = 0, \phi(\beta)\}$, to $\phi(\beta) \neq 0$.

  W podobny sposób możemy rozważyć $\phi(V_2)$. Przestrzeń $\phi(V_2)$ ma wymiar 2 i jest rozpięta przez $\{\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2) = 0, \phi(\gamma_1), \phi(\gamma_2)\}$, zatem tylko $\phi(\gamma_1)$ albo $\phi(\gamma_2)$ jest różne od 0 (załóżmy, że $\phi(\gamma_1) \neq 0$). Otóż $\dim \ker \phi = \dim lin\{\alpha_2, \gamma_2\} = 2$, więc $\dim \phi(V) = \dim im\phi = dim(V) - \dim \ker \phi = 5 - 2 = 3$.

Na przykład niech tak, jak poprzednio $V = \mathbb{R}^5$ z bazą standardową. Natomiast $V_1 = lin\{e_1, e_2, e_3\}$, $V_2 = lin\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$. Przekształcenie $\phi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ określamy wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, 0, x_3, x_4, 0).$$

Oczywiście $\dim \phi(\mathbb{R}^5) = 3$.

- Załóżmy, że obydwa wektory α_1, $\alpha_2 \in ker\phi$. Wówczas

$$2 = \dim \phi(V_1) = \dim lin\{\phi(\beta)\} \leqslant 1,$$

co jest sprzecznością. Zatem rozważyliśmy wszystkie możliwe przypadki i obraz przestrzeni V w przekształceniu ϕ może być 2- lub 3-wymiarowy.

Zadanie 5.

Niech $V = V_1 \oplus V_2$ oraz $f\colon V \to W$ będzie monomorfizmem. Udowodnij, że

$$imf = f(V_1) \oplus f(V_2).$$

Rozwiązanie. Należy udowodnić, że $imf = f(V_1) \oplus f(V_2)$, czyli że $imf = f(V_1) + f(V_2)$ oraz $f(V_1) \cap f(V_2) = \{0\}$.

Z założenia $V = V_1 \oplus V_2$. Niech zbiór $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ będzie bazą V_1, zaś zbiór $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$ będzie bazą V_2. Wówczas zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l\}$ jest bazą V. Ponieważ f jest monomorfizmem, to ma trywialne jądro, a więc układ $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)\}$ jest bazą $f(V_1)$, układ $\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_l)\}$ jest bazą $f(V_2)$, zaś układ $\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k), f(\beta_1), \ldots, f(\beta_l)\}$ jest bazą $f(V)$. Ponieważ każdy wektor z $f(V)$ można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową wektorów z tej bazy, to rzeczywiście $f(V) = imf = f(V_1) \oplus f(V_2)$.