Rozwiązania, seria 5.

26 listopada 2012

Zadanie 1.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ wektor

$$(r, r, 1) \in lin\{(2, r, -r), (1, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3?$$

Rozwiązanie. Załóżmy, że $(r, r, 1) \in lin\{(2, r, -r), (1, 2, -2)\}$. Dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$(r, r, 1) = a(2, r, -r) + b(1, 2, -2).$$

Powyższą równość można przepisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} r = 2a + b \\ r = ar + 2b \\ 1 = -ar - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2a + b \\ r = ar + 2b \\ ar = -2b - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 2a + b \\ r = -2b - 1 + 2b \\ ar = -2b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2a + b \\ r = -1 \\ a = 2b + 1 \end{cases}$$

Zatem dla $r = -1$ zachodzi

$$(r, r, 1) \in lin\{(2, r, -r), (1, 2, -2)\}.$$

Zadanie 2.

Wykaż, że zbiór

$$\{\alpha = (1, 1, 0, 0), \beta = (0, 1, 1, 0), \gamma = (0, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

jest liniowo niezależny.
Uzupełnij ten układ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1, 1)$ w tej bazie.

Rozwiązanie. Żeby przekonać się, że wektory α, β, γ są liniowo niezależne, możemy zapisać je jako wiersze macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Łatwo zauważamy trzy schodki, więc wektory są liniowo niezależne.
Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ jest 4-wymiarowa, więc aby uzupełnić ten układ do bazy całej przestrzeni, wystarczy znaleźć jeden dowolny wektor z $\mathbb{R}^4$ i sprawdzić, że jest liniowo niezależny z układem $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Na przykład $e_4 = (0,0,0,1)$ jest dobrym kandydatem, gdyż należy do $\mathbb{R}^4$ i nietrudno się przekonać, że jest liniowo niezależny z naszym układem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Widzimy cztery schodki, więc wektory $\alpha, \beta, \gamma, e_4$ są liniowo niezależne i tworzą bazę $\mathbb{R}^4$.
Teraz chcemy znaleźć współrzędne wektora $(1,1,1,1)$ w tej bazie. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(1,1,1,1) &= (1,1,0,0) + (0,0,1,1) \\ &= \alpha + \gamma \\ &= 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma + 0 \cdot e_4.\end{aligned}$$

Zatem współrzędne $(1,1,1,1)$ w bazie $\{\alpha, \beta, \gamma, e_4\}$ to $(1,0,1,0)$.

Zadanie 3.

$$\begin{aligned}\text{Niech } A &= lin\{(3,3,4,3), (1,-1,-2,1), (2,1,1,2)\} \\ \text{oraz } B &= lin\{(2,3,3,1), (0,1,3,1), (1,1,0,0)\}\end{aligned}$$

będą podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$.
Znajdź bazy przestrzeni $A \cap B$, $A + B$.

Rozwiązanie. Znajdźmy wymiary i bazy przestrzeni A i B.
Najpierw dla przestrzeni A. Układ $\{(3,3,4,3), (1,-1,-2,1), (2,1,1,2)\}$ rozpina tę przestrzeń z założenia, ale nie wiemy, czy jest liniowo niezależny. Żeby znaleźć bazę A, zapisujemy wektory z układu rozpinającego w wierszach macierzy i sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{III-2\cdot II}{\overset{I-3\cdot II}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-2\cdot III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Z postaci ostatniej macierzy odczytujemy, że bazą przestrzeni A jest układ (α_1, α_2), gdzie

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, -1, -2, 1)\\ \alpha_2 &= (0, 3, 5, 0).\end{aligned}$$

Zatem $\dim A = 2$.
W podobny sposób szukamy bazy i wymiaru przestrzeni B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-2\cdot III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z postaci ostatniej macierzy odczytujemy, że bazą B jest układ wektorów $\{\beta_1, \beta_2\}$, gdzie

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (0, 1, 3, 1)\\ \beta_2 &= (1, 1, 0, 0).\end{aligned}$$

Zatem $\dim B = 2$.
Zauważmy, że z postaci bazy przestrzeni A wynika, że $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A \Rightarrow x_1 = x_4$. Zatem $\beta_1, \beta_2 \notin A$, więc $A \neq B$. Zastanówmy się, kiedy wektor z B może należeć do A? Czyli kiedy zachodzi $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B$ oraz $x_1 = x_4$? Ponieważ $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B$, to $(x_1, x_2, x_3, x_4) = b_1\beta_1 + b_2\beta_2$. Z postaci wektorów $\beta_1 = (0, 1, 3, 1), \beta_2 = (1, 1, 0, 0)$ oraz warunku $x_1 = x_4$ odczytujemy, że jeśli przestrzenie A i B się przecinają, to wzdłuż prostej rozpiętej przez
$\gamma = (1, 2, 3, 1) = \beta_1 + \beta_2$. Zauważmy, że rzeczywiście $A \cap B = lin\{(1, 2, 3, 1)\}$, gdyż $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$.
Szukamy bazy przestrzeni $A + B$. Dla wygody zamiast bazy α_1, α_2 przestrzeni A rozważymy bazę γ, α_2; zamiast bazy β_1, β_2 przestrzeni B rozważymy bazę β_1, γ. Ponieważ dowolny wektor z $A+B$ jest kombinacją liniową wektorów z baz obydwu przestrzeni, to wystarczy uprościć układ dwóch baz do układu wektorów liniowo niezależnych. Dostajemy $A+B = lin\{(\alpha_2, \beta_1, \gamma\}$, układ $\{(\alpha_2, \beta_1, \gamma\}$ jest bazą przestrzeni $A + B$. (Liniowa niezależność tych wektorów jest oczywista, jeśli się im przez chwilę przyjrzeć. Ale można się o tym przekonać zapisując bazy obywdu przestrzeni jako wiersze macierzy i sprowadzając do postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-3\cdot III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

zatem wektory $(0, 3, 5, 0), (1, 2, 3, 1), (0, 1, 3, 1)$ tworzą bazę przestrzeni $A + B$.)

Zadanie 4.

Niech $V = lin\{(2,-1,-1,1,0),(-2,2,1,-2,a),(0,-1,0,-1,0)\}$ i niech W będzie przestrzenią rozwiązań układu o macierzy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & b & 0 \end{array}\right)$$

Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $W \subseteq V$? Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie. Najpierw rozwiążemy układ równań opisujący przestrzeń W. Dla wygody nie będziemy zapisywać kolumny wyrazów wolnych, gdyż w żadnym kroku się nie zmieni i pozostanie stale równa 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & b \end{pmatrix} \underset{II+2\cdot III}{\overset{I+III}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2b \\ -1 & -2 & -2 & 2 & b \end{pmatrix} \underset{III-2\cdot II}{\overset{I-3\cdot II}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -5b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2b \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3b \end{pmatrix}$$

1. Dla $b = 0$ mamy

   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Odczytujemy, że $x_1 = -2x_3, x_2 = x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Zatem wszystkie rozwiązania są postaci:

   $$x_3(-2,0,1,0,0) + x_4(0,1,0,1,0) + x_5(0,0,0,0,1), \text{ gdzie } x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

   Czyli bazą W jest układ:

   $$\{(-2,0,1,0,0),(0,1,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}.$$

2. Dla $b \neq 0$ mamy

   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   Odczytujemy, że $x_1 = -2x_3, x_2 = x_4, x_5 = 0$. Zatem wszystkie rozwiązania są postaci:

   $$x_3(-2,0,1,0,0) + x_4(0,1,0,1,0), \text{ gdzie } x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

   Czyli bazą W jest układ:

   $$\{(-2,0,1,0,0),(0,1,0,1,0)\}.$$

Przyjrzyjmy się teraz przestrzeni V. Zauważmy, że wszystkie wektory w układzie rozpinającym V spełniają równanie $x_2 = -x_4$, zatem dowolny wektor z V musi spełniać to równanie. To oznacza, że wektor $(0, 1, 0, 1, 0) \notin V$ dla dowolnych a i b. Ale ten wektor należy do bazy przestrzeni W. Więc dla dowolnych a i b $W \nsubseteq V$.

Zadanie 5.

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będą niezerowymi wektorami w $\mathbb{R}^{2012}$ i niech V_i oznacza $lin(\alpha_i)$. Które z poniższych warunków są równoważne? Uzasadnij odpowiedź.

a) Wektory α_i są niezależne;

b) $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n = 0$;

c) Dla każdego i zachodzi $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = 0$;

d) Dla pewnego i zachodzi $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = 0$.

Rozwiązanie. Rozważmy wszystkie możliwe implikacje po kolei.
Zauważmy, że **a**) w oczywisty sposób implikuje pozostałe warunki, gdyż oznacza, że

1. przestrzenie rozpięte przez wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przecinają się tylko w 0 (warunek **b**));

2. żaden z wektorów nie jest kombinacją liniową pozostałych (warunki **c**) i **d**)).

Pokażemy, że **b**) $\nRightarrow$ **a**) oraz **d**) $\nRightarrow$ **a**). Rozważmy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takie, że α_1 i α_2 są liniowo niezależne, zaś $\alpha_3 = 2\alpha_2$. Oczywiście $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$ oraz $V_1 \cap (V_2 + V_3) = 0$, ale te wektory nie są liniowo niezależne.
Przyjrzyjmy się warunku **c**). Warunek **c**) oznacza, że dla każdego i α_i nie jest kombinacją liniową pozostałych wektorów, co implikuje liniową niezależność wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Zatem **a**) $\Leftrightarrow$ **c**).
Pozostało sprawdzić implikację pomiędzy **b**) i **d**). Wykażemy, że **b**) $\nRightarrow$ **d**). Weźmy

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0), \\ \alpha_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \alpha_3 &= (1, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są parami liniowo niezależne, zatem $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$. Ale $\alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, więc warunek **d**) nie zachodzi.
Odpowiedź: jedyną równoważnością jest **a**) $\Leftrightarrow$ **c**).