Zadanie 1.

Niech A i B będą podprzestrzeniami V. Wykaż, że $A \cup B$ jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy $A \subset B$ lub $B \subset A$.

Rozwiązanie 1. $\Leftarrow$ Jeśli $A \subset B$ (odpowiednio $B \subset A$), to $A \cup B = B$ (odpowiednio A) i wówczas oczywiście $A \cup B$ jest podprzestrzenią V.

$\Rightarrow$ Z założenia $A \cup B$ jest podprzestrzenią, zatem dla dowolnych α i $\beta \in A \cup B$ zachodzi:

$$\alpha + \beta \in V.$$

Załóżmy, że nieprawdą jest, że $A \subset B$ lub $B \subset A$. Wówczas istnieją $\alpha \in A \setminus B$ oraz $\beta \in B \setminus A$. Oczywiście α, $\beta \in A \cup B$. Wykażemy, że $\alpha + \beta \notin A \cup B$.
Załóżmy, że $\alpha + \beta \in A \cup B$, wtedy $\alpha + \beta \in A$ lub $\alpha + \beta \in B$. Ponieważ A i B są podprzestrzeniami, to $-\alpha \in A$ oraz $-\beta \in B$. W szczególności, jeśli $\alpha + \beta \in A$, to

$$(\alpha + \beta) + (-\alpha) = \beta \in A,$$

(odpowiednio, jeśli $\alpha + \beta \in B$, to $(\alpha + \beta) + (-\beta) = \alpha \in B$)), co jest sprzeczne z założeniem, że $\beta \in B \setminus A$ (odpowiednio $\alpha \in A \setminus B$).
Zatem $A \subset B$ lub $B \subset A$.

Zadanie 2.

Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ z naturalnym dodawaniem będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ z mnożeniem $\circ$. Wiedząc, że $\sqrt{3} \circ 1 = 2 + \sqrt{5}$, wylicz $\sqrt{3} \circ \sqrt{5}$.

Rozwiązanie 2.

$\sqrt{3} \circ \sqrt{5} = \sqrt{3} \circ (2 + \sqrt{5} - 2)$
$= \sqrt{3} \circ (2 + \sqrt{5}) - \sqrt{3} \circ 2$ (z rozdzielności mnożenia $\circ$ względem dodawania w $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$)
$= \sqrt{3} \circ (\sqrt{3} \circ 1) - \sqrt{3} \circ 1 - \sqrt{3} \circ 1$ (bo $2 = 1 + 1$ i korzystamy z rozdzielności)
$= (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) \circ 1 - 2 - \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5}$ (z łączności mnożenia)
$= 3 \circ 1 - 4 - 2\sqrt{5}$
$= 3 - 4 - 2\sqrt{5}$ (z rozdzielności mnożenia $\circ$ względem dodawania w $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$)
$= -1 - 2\sqrt{5}$.

Odpowiedź: $\sqrt{3} \circ \sqrt{5} = -1 - 2\sqrt{5}$.

Zadanie 3.

Niech $V = lin\{(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 1, -1, t)\}$ będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

a) Znajdź $\dim V$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

b) Dla $t = 2$ podaj przykład bazy przestrzeni V.

Rozwiązanie 3. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\begin{aligned} v_1 &:= (1, 2, 0, 1), \\ v_2 &:= (2, 3, 1, 0), \\ v_3 &:= (0, 1, -1, t). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wektory v_1 i v_2 są liniowo niezależne. Ponadto, jeśli $t = 2$, to $v_3 = 2v_1 - v_2$, a więc $v_3 \in lin\{v_1, v_2\}$. Zatem przestrzeń V jest rozpięta przez dwa liniowo niezależne wektory (v_1 i v_2), więc $\dim V = 2$.

Załóżmy, że $t \neq 2$. Jeśli zapiszemy wektory v_1, v_2 i v_3 w wierszach macierzy i sprowadzimy tę macierz do postaci schodkowej zredukowanej, to przekonamy się, że wiersze są liniowo niezależne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$$

Zatem, jeśli $t \neq 2$, bazą przestrzeni V jest zbiór $\{(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 1, -1, t)\}$, a wymiar $\dim V = 3$.

Zadanie 4.

a) Znajdź bazę przestrzeni

$$lin((1, 2, 3, -2, -4), (1, 4, -3, -4, 2), (1, 3, 0, -3, -1)).$$

b) Dopełnij bazę otrzymaną w punkcie **a**) do bazy przestrzeni rozwiązań układu równań o macierzy:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

c) Zauważ, że w punktach **a**) i **b**) jest wiele poprawnych wyników. Co więcej ponieważ treść punktu **b**) zależy od bazy wybranej w punkcie **a**), teoretycznie zbiór poprawnych wyników w **b**) mógłby również zależeć od tej bazy. Udowodnij, że nie zależy.

Rozwiązanie 4. a) Oznaczmy:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 3, -2, -4), \\ v_2 &= (1, 4, -3, -4, 2), \\ v_3 &= (1, 3, 0, -3, -1). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, a wektory v_1 i v_2 są liniowo niezależne. Zatem przykładową bazą przesterzni jest układ: $\{v_1, v_2\}$.

b) Zauważmy, że wiersze macierzy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

są liniowo niezależne, a więc przestrzeń rozwiązań jest 3-wymiarową ($5 - 2 = 3$) podprzestrzenią $\mathbb{R}^5$.
Ponadto wektory v_1 i v_2 należą do przestrzni rozwiązań układu, gdyż

$$v_1 : 1 + 2 + 3 - 2 - 4 = 0 \text{ oraz } 1 - 2 + 3 + 2 - 4 = 0,$$
$$v_2 : 1 + 4 - 3 - 4 + 2 = 0 \text{ oraz } 1 - 4 - 3 + 4 + 2 = 0.$$

Już znaleźliśmy dwa liniowo niezależne wektory (v_1 i v_2) należące do przestrzeni rozwiązań układu. Ponieważ przestrzeń jest 3-wymiarowa, to wystarczy znaleźć rozwiązanie liniowo niezależne z v_1 i v_2. Weźmy na przykład wektor $(0, 0, 1, 0, -1)$. Oczywiście ten wektor spełnia układ równań, więc należy do przestrzeni rozwiązań. Przekonajmy się, że jest liniowo niezależny z wektorami v_1 i v_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Widzimy trzy schodki, zatem wektory $(0, 0, 1, 0, -1)$, v_1 i v_2 są liniowo niezależne.
Znaleźliśmy trzy liniowo niezależne wektory w przestrzeni 3-wymiarowej, więc jest to przykładowa baza przestrzeni rozwiązań układu.
Odpowiedź: przykładową bazą jest układ $((0, 0, 1, 0, -1), (1, 2, 3, -2, -4), (1, 4, -3, -4, 2))$.

c) Zauważmy, że przestrzeń z punktu **a**) jest podprzestrzenią przestrzeni rozwiązań układu z punktu **b**). Zatem, każdy wektor spełniający układ równań z **b**) i nie należący do przestrzeni z punktu **a**) jest dobrym dopełnieniem do bazy. Więc odpowiedź nie zależy od bazy przestrzeni z a).

Zadanie 5

Udowodnij, że przestrzeń wielomianów (o współczynnikach rzeczywistych, ze standardowymi działaniami) ma nieskończony wymiar nad $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie 5. Rozważmy układ wielomianów $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$. Chcemy wykazać, że jest to baza przestrzeni wielomianów nad $\mathbb{R}$. Ponieważ ten układ jest nieskończony, to przestrzeń jest nieskończenie wymiarowa.
Przede wszystkim zauważmy, że każdy wielomian $w(x)$ nad $\mathbb{R}$ jest kombinacją liniową jednomianów $1, x, x^2, \ldots$, gdyż zapisuje się w postaci:

$$w(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Należy wykazać, że jednomiany $1, x, x^2, \ldots$ są liniowo niezależne. Załóżmy, że nie są. Wówczas dla pewnego $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{n+1} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Niech $A(x)$ będzie wielomianem zdefiniowanym wzorem:

$$A(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

$A(x)$ jest stopnia n i ma n różnych pierwiastków w $\mathbb{R}$.
Rozważmy wielomian $(x-2n) \cdot A(x)$. Jest to wielomian stopnia $n+1$ i ma $n+1$ pierwiastków w $\mathbb{R}$. Z założenia $(x-2n)A(x)$ jako wielomian stopnia $n+1$ jest kombinacją liniową wielomianów mniejszego stopnia. Niech $(x-2n) \cdot A(x) = B(x)$, gdzie $B(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ $(b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{R})$, stopień $B(x) \leqslant n$. Z wykładu wiemy, że $B(x)$ ma co najwyżej n różnych pierwiastków w $\mathbb{C}$. Zatem w zbiorze $\{1, 2, \cdots, n, 2n\}$ pierwiastków $(x-2n) \cdot A(x)$ istnieje takie k, że $B(k) \neq 0$. Zatem

$$0 = (k-2n) \cdot A(k) = B(k) \neq 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $(x-2n) \cdot A(x) = B(x)$.
Zatem przestrzeń wielomianów nad $\mathbb{R}$ jest nieskończenie wymiarowa.