Praca domowa - seria 3

20 listopada 2012

Zadanie 1.

Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu.

Rozwiązanie 1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (2+2i)x_3 + 2x_4 = 1 \\ (1-i)x_1 + (2-2i)x_2 - 3x_3 + (5-5i)x_4 = -6+6i \\ (2-i)x_1 + (4-2i)x_2 + (5+8i)x_3 + (9+5i)x_4 = 7+6i \end{cases}$$

Zapisuję macierz tego układu równań:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2+2i & 2 & 1 \\ 1-i & 2-2i & -3 & -5+5i & -6+6i \\ 2-i & 4-2i & 5+8i & 9+5i & 7+6i \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ -(1-i)w_1 \\ -(2-i)w_1 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2+2i & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7+7i & -7+7i \\ 0 & 0 & 1-6i & 5+7i & 5+7i \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ :(-7) \\ \\ \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2+2i & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 1-6i & 5+7i & 5+7i \end{array}\right] & \begin{array}{l} -(2+2i)w_2 \\ \\ -(1-6i)w_2 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

W wyniku operacji elementarnych na wierszach otrzymuję postać schodkową zredukowaną macierzy, na podstawie której łatwo wypisuję rozwiązanie ogólne:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 - 3 \\ x_3 = -(1-i)x_4 + 1 - i \\ x_2, x_4 \in \mathbb{C} \text{ (parametry)} \end{cases}$$

Inaczej, rozwiązania są postaci:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-2x_2 + 2x_4 - 3, x_2, -(1-i)x_4 + 1 - i, x_4) = \\ &= x_2(-2, 1, 0, 0) + x_4(2, 0, -1+i, 1) + (-3, 0, 1-i, 0), \end{aligned}$$

gdzie $x_2, x_4 \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.

a) Znajdź wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$ spełniające $z^4 + z^3 + 3z^2 = 0$.
b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ wszystkie rozwiązania powyższego równania, które leżą w zbiorze: $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Rozwiązanie 2 *Ad a)*

$$z^4 + z^3 + 3z^2 = 0$$
$$z^2(z^2 + z + 3) = 0$$

Stąd wynika, że

$$z = 0 \quad \vee \quad z^2 + z + 3 = 0.$$

Rozwiązuję równanie kwadratowe. Liczę deltę

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 = -11$$
$$\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{11}i$$

i podstawiam do wzorów

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2} \qquad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2}$$

Otrzymuję więc trzy rozwiązania danego równania: $\left\{0, \frac{-1-\sqrt{11}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}i}{2}\right\}$.

Ad b)

$$|0| = 0 < 1$$
$$\left|\frac{-1 - \sqrt{11}i}{2}\right| = \sqrt{3} > 1$$
$$\left|\frac{-1 + \sqrt{11}i}{2}\right| = \sqrt{3} > 1$$

Zatem jedynie $z = 0$ mieści się w zbiorze D.

Zadanie 3.

Wielomian $x^4 - 3x^2 + 9$ zapisz jako iloczyn wielomianów stopnia $\leqslant 2$.

Rozwiązanie 3 *I sposób*

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 9 &= x^4 + 6x^2 + 9 - 9x^2 = (x^2+3)^2 - (3x)^2 = \\ &= (x^2 + 3 - 3x)(x^2 + 3 + 3x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3) \end{aligned}$$

II sposób
Jeżeli potraktujemy dany wielomian jako wielomian o współczynnikach z ciała liczb zespolonych, to wiemy, że posiada on 4 (wraz z krotnościami) pierwiastki

w tym ciele (ciało liczb zespolonych jest domknięte algebraicznie). Dodatkowo, skoro współczynniki są liczbami rzeczywistymi, to wiadomo, że jeżeli pierwiastkiem jest liczba zespolona, to również liczba do niej sprzężona. Zatem rozkład na czynniki o stopniu $\leqslant 1$ *będzie miał postać:*

$$(x-u_1)(x-\overline{u}_1)(x-u_2)(x-\overline{u}_2)$$

Po wymnożeniu pierwszego nawiasu przez drugi oraz trzeciego przez czwarty otrzymamy iloczyn wielomianów stopnia 2 *o współczynnikach rzeczywistych.*

$$(x^2-2Re(u_1)x+|u_1|^2)(x^2-2Re(u_2)x+|u_2|^2).$$

Niech $z=x^2$. *Liczymy pierwiastki równania:*

$$z^2-3z+9=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 9-4\cdot 9=-27 \\ \sqrt{\Delta} &= \pm 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Rozwiązania:

$$z_1=\frac{3-3\sqrt{3}i}{2} \qquad z_2=\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$$

Zatem równanie przyjmuje postać:

$$\left(z-\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}\right)=0$$

Niech $z=w^2$. *Wtedy równanie można przepisać w postaci:*

$$\left(w^2-\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}\right)\left(w^2-\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}\right)=0$$

i pozostaje obliczyć pierwiastki z $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ *i* $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$.

$$\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3 \\ a^2-b^2=\frac{3}{2} \\ 2ab=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Pierwsze równanie wynika z faktu, że jeżeli w *jest pierwiastkiem* v, *to* $|w|^2=|v|$. *Kolejne dwa zaś z definicji pierwiastka powyżej. Dodając stronami równanie drugie do pierwszego uzyskujemy:*

$$\begin{cases} 2a^2=\frac{9}{2} \quad => \quad a=\pm\frac{3}{2} \\ a^2-b^2=\frac{3}{2} \\ ab=-\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Po podstawieniu do trzeciego równania otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\left(a=\frac{3}{2} \quad \wedge \quad b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \vee \quad \left(a=-\frac{3}{2} \quad \wedge \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Stąd szukanymi pierwiastkami są:

$$w_1=\frac{3-\sqrt{3}i}{2} \qquad w_2=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}.$$

Analogicznie postępujemy szukając pierwiastków $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$*:*

$$\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3 \\ a^2-b^2=\frac{3}{2} \\ 2ab=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2=\frac{9}{2} \quad => \quad a=\pm\frac{3}{2} \\ a^2-b^2=\frac{3}{2} \\ ab=\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Po podstawieniu do trzeciego równania otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\left(a=\frac{3}{2} \quad \wedge \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \vee \quad \left(a=-\frac{3}{2} \quad \wedge \quad b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Stąd szukanymi pierwiastkami są:

$$w_3=\frac{3+\sqrt{3}i}{2} \qquad w_4=-\frac{3+\sqrt{3}i}{2}.$$

Wynik ten można również otrzymać obliczając sprzężenia w_1 *i* w_2*.*
Wyjściowy wielomian w postaci iloczynowej:

Zadanie 4.

Niech z_1, z_2, z_3 będą parami różnymi liczbami zespolonymi, tworzącymi na płaszczyźnie trójkąt. Zauważ, że warunek ten można wyrazić w języku liczb zespolonych na przykład tak: $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \notin \mathbb{R}$. W poniższych podpunktach podano w języku liczb zespolonych różne warunki na temat położenia punktu $z \in \mathbb{C}$. Przetłumacz (podając stosowne uzasadnienie) tych pięć warunków na szkolny język geometrii trójkąta.

a)

$$z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

b)

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|;$$

c)

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3};$$

d)

$$\frac{(z - z_1)}{i(z_2 - z_3)}, \qquad \frac{(z - z_2)}{i(z_3 - z_1)}, \qquad \frac{(z - z_3)}{i(z_1 - z_2)} \in \mathbb{R};$$

e)

$$\frac{(z - z_1)^2}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}, \quad \frac{(z - z_2)^2}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_2)}, \quad \frac{(z - z_3)^2}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie 4 *a) Punkt z leży w połowie odcinka z_1, z_2.*

b) Punkt z jest tak samo odległy od każdego z wierzchołków trójkąta z_1, z_2, z_3, czyli jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

c) Punkt z na każdej współrzędnej jest średnią arytmetyczną odpowiednich współrzędnych punktów z_1, z_2, z_3, czyli jest środkiem ciężkości trójkąta z_1, z_2, z_3.

d) Będziemy myśleć o liczbach zespolonych jako o odcinkach zaczepionych w zerze.

Jeżeli iloraz dwóch liczb zespolonych jest rzeczywisty to znaczy, że ich kąty różnią się o wielokrotność π, czyli, że odpowiadające im odcinki są do siebie równoległe.

Przemnożenie liczby zespolonej przez i zwiększa jej kąt o $\frac{\pi}{2}$ czyli jest to obrót o kąt prosty.

Zatem warunek $\frac{(z-z_1)}{i(z_2-z_3)}$ oznacza, że odcinki z, z_1 oraz z_2, z_3 są do siebie prostopadłe. Czyli z, z_1 leży na prostej, zawierającej wysokość trójkąta z_1, z_2, z_3 opadającej z wierzchołka z_1 na bok z_2, z_3. Podobnie dla pozostałych dwóch warunków.

Wobec tego punkt z leży na przecięciu się wysokości w trójkącie z_1, z_2, z_3.

e) Podobnie jak powyżej, będziemy myśleć nad kątami nachylenia poszczególnych odcinków.

Warunek $\frac{(z-z_1)^2}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}$ możemy odczytać jako, że odcinek z, z_1 ma kąt nachylenia będący średnią kątów nachylenia odcinków z_2, z_1 oraz z_3, z_1. Zatem odcinek z, z_1 leży na prostej będącej dwusieczną kąta między odcinkami z_2, z_1 oraz z_3, z_1. Podobnie dla pozostałych warunków.

Wobec tego punkt z leży na przecięciu dwusiecznych kątów w trójkącie z_1, z_2, z_3, czyli jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 5.

Udowodnij, że istnieje liczba zespolona z taka, że

$$z^{2012} = -2 \quad \text{oraz} \quad |z - i| \leqslant \frac{1}{10}.$$

Rozwiązanie 5 *Dla równania* $z^{2012} = -2$ *weźmy jego pierwiastek*

$$\sqrt[2012]{2}\left(\cos\frac{1005\pi}{2012} + i\sin\frac{1005\pi}{2012}\right).$$

Jego odległość od liczby i można oszacować z góry przy użyciu nierówności trójkąta jako sumę różnic po obu współrzędnych, czyli

$$\sqrt[2012]{2}\cos\frac{1005\pi}{2012} + \left(\sqrt[2012]{2}\sin\frac{1005\pi}{2012} - 1\right).$$

Wiedząc, że $\cos\frac{1005\pi}{2012} = \sin\frac{\pi}{2012} \leqslant \frac{\pi}{2012}$ *oraz* $\sin\frac{1005\pi}{2012} \leqslant 1$ *szacujemy z góry przez*

$$\sqrt[2012]{2}\cdot\frac{\pi}{2012} + \sqrt[2012]{2} - 1.$$

Kolejno, dzięki nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną wiemy, że $\sqrt[2012]{2} \leqslant \frac{2013}{2012}$ *(gdyż* $2 = 2\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1$*), co daje*

$$\frac{2013}{2012}\cdot\frac{\pi}{2012} + \frac{2013}{2012} - 1 = \frac{\frac{2013}{2012}\pi - 1}{2012} \leqslant \frac{2\cdot 4 - 1}{2012} = \frac{7}{2012} \leqslant \frac{1}{10}.$$

Co było do pokazania.