Praca domowa - seria 2

20 listopada 2012

Zadanie 1.

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających nierówność:
$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |2 - i - \bar{z}| < 2 - Im(z)\}$.

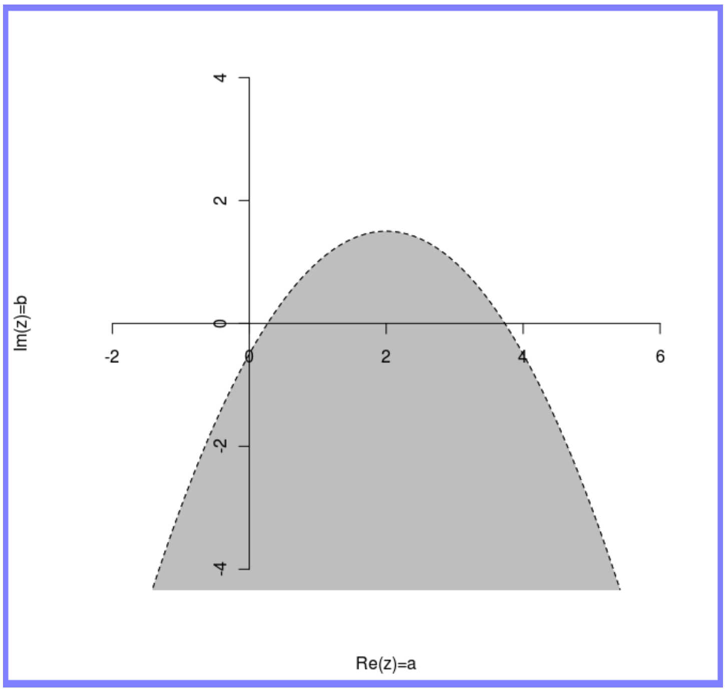
Rozwiązanie 1 *Niech* $z = a + ib$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$. *Wtedy* $\bar{z} = a - ib$ *oraz* $Im(z) = b$. *Podstawiamy do nierówności otrzymując:*

$$\begin{aligned} |2 - i - (a - bi)| &< 2 - b \\ |(2 - a) + i(b - 1)| &< 2 - b \\ \sqrt{(2 - a)^2 + (b - 1)^2} &< 2 - b. \end{aligned}$$

Ponieważ moduł dowolnej liczby zespolonej jest nieujemny, to $0 < 2 - b$, *czyli* $b < 2$. *Skoro po obu stronach nierówności znajdują się liczby dodatnie, to możemy obustronnie potęgować:*

$$\begin{aligned} (2 - a)^2 + (b - 1)^2 &< (2 - b)^2 \\ (a - 2)^2 + b^2 - 2b + 1 &< 4 - 4b + b^2 \\ (a - 2)^2 - 3 &< -2b \\ -\frac{1}{2}(a - 2)^2 + \frac{3}{2} &> b. \end{aligned}$$

Krzywą ograniczającą zbiór rozwiązań jest parabola o wierzchołku $(2, \frac{3}{2})$ *i współczynniku kierującym równym* $-\frac{3}{2}$.



Rysunek 1: Zbiór A

Zadanie 2.

Znaleźć część rzeczywistą i urojoną liczby $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^{17}$.

Rozwiązanie 2 *Niech* $w = \sqrt{3} - i$, $u = 1 - i$ *i* $z = (\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^{17}$. *Przedstawiamy* w *i* u *w postaci trygonometrycznej:*
$|w| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$
$\cos\theta_w = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *oraz* $\sin\theta_w = -\frac{1}{2}$, *czyli* $Arg(w) = \frac{11\pi}{6}$
$|u| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\cos\theta_u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *oraz* $\sin\theta_u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, *czyli* $Arg(u) = \frac{7\pi}{4}$

$$z = \left(\frac{w}{u}\right)^{17} = \frac{|w|^{17}(\cos(17Arg(w)) + i\sin(17Arg(w)))}{|u|^{17}(\cos(17Arg(u)) + i\sin(17Arg(u)))} = \frac{2^{17}(\cos(\frac{17\cdot 11\pi}{6}) + i\sin(\frac{17\cdot 11\pi}{6}))}{\sqrt{2}^{17}(\cos(\frac{17\cdot 7\pi}{7}) + i\sin(\frac{17\cdot 7\pi}{4}))} =$$

$$= \sqrt{2}^{17}\frac{\cos(\frac{187\pi}{6}) + i\sin(\frac{187\pi}{6})}{\cos(\frac{119\pi}{4}) + i\sin(\frac{119\pi}{4})} = \sqrt{2}^{17}\frac{\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})}{\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})} = \sqrt{2}^{17}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}^{17}\frac{(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}^{17}(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}) =$$

$$= \sqrt{2}^{13}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i\sqrt{2}^{13}(-\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 128(1 - \sqrt{3}) - i128(1 + \sqrt{3})$$

Otrzymujemy:
$Re(z) = 128(1 - \sqrt{3})$
$Im(z) = -128(1 + \sqrt{3})$.

section*Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które są rozwiązaniami równania:
$(1 - 2i)z^2 - (9 + 2i)z + 10i = 0$
(opisz część rzeczywistą i urojoną rozwiązań).

Rozwiązanie 3 $\Delta = (9 + 2i)^2 - 4(1 - 2i) \cdot 10i = 81 + 36i - 4 - 40i - 80 = -3 - 4i$.
Szukamy pierwiastków Δ*, czyli liczb postaci* $a+bi$ *spełniających:* $\Delta = (a+bi)^2$ *oraz* $|\Delta| = |a + bi|^2$.

$$\begin{cases} -3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi \\ \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = a^2 - b^2 \\ -4 = 2ab \\ 5 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Dodając stronami pierwsze i ostatnie równanie uzyskujemy:

$$\begin{cases} 2 = 2a^2 \\ -2 = ab \\ 5 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} a = 1 \lor a = -1 \\ -2 = ab \\ 5 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Zatem $(a = 1 \land b = -2) \lor (a = -1 \land b = 2)$ *i szukane pierwiastki to* $\sqrt{\Delta}_1 = 1 - 2i$ *oraz* $\sqrt{\Delta}_2 = -1 + 2i$. *Stąd rozwiązaniami równania są:*
$z_1 = \frac{9+2i+1-2i}{2(1+2i)} = \frac{10(2+4i)}{2^2+4^2} = \frac{20+40i}{20} = 1 + 2i$
oraz
$z_2 = \frac{9+2i-1+2i}{2(1-2i)} = \frac{(8+4i)(2+4i)}{20} = \frac{40i}{20} = 2i.$
Czyli: $Re(z_1) = 1$, $Im(z_1) = 2$, $Re(z_2) = 0$, $Im(z_2) = 2$

Zadanie 4.

Niech

$$A = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z^4) \geqslant -\sqrt{3}\Re(z^4)\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} | z(z^4 - 1) = 0\}.$$

Naszkicuj zbiór A na płaszczyźnie oraz znajdź liczbę elementów przecięcia $A \cap B$.
Wskazówka: Druga część zadania jest znacznie prostsza od pierwszej.

Rozwiązanie 4 Część pierwsza:

Przede wszystkim przedstawmy z w postaci geometrycznej liczby zespolonej:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ \textit{gdzie } r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi).$$

Zauważmy, że zbiór A można zapisać w innej postaci

$$\begin{aligned} A &= \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C} | r\sin 4\varphi \geqslant -\sqrt{3}r\cos 4\varphi\} \\ &= \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C} | \sin 4\varphi \geqslant -\sqrt{3}\cos 4\varphi\}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że wartość r jest dowolna nieujemna.

Jeśli $\sin 4\varphi$ *i* $\cos 4\varphi$ *są tych samych znaków, to muszą być nieujemne, aby warunek był prawdziwy, czyli* $4\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Dla $\sin 4\varphi \geqslant 0 \geqslant \cos 4\varphi$, *czyli dla* $4\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, *warunek jest równoważny* $\sin^2 4\varphi \geqslant 3\cos^2 4\varphi$, *czyli* $\sin^2 4\varphi \geqslant 3(1 - \sin^2 4\varphi)$, *a zatem* $\sin^2 4\varphi \geqslant \frac{3}{4}$.

A skoro dla tego przypadku $\sin 4\varphi \geqslant 0$ *to jest to równoważne* $\sin 4\varphi \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, *czyli* $4\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$.

Dla $\sin 4\varphi \leqslant 0 \leqslant \cos 4\varphi$, *czyli dla* $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, *warunek jest równoważny* $\sin^2 4\varphi \leqslant 3\cos^2 4\varphi$, *czyli* $1 - \cos^2 4\varphi \leqslant 3\cos^2 4\varphi$, *a zatem* $\frac{1}{4} \leqslant \cos^2 4\varphi$. *Ponieważ dla tego przypadku* $\cos 4\varphi \geqslant 0$ *to jest to równoważne* $\frac{1}{2} \leqslant \cos 4\varphi$, *czyli* $4\varphi \in [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.

Zatem cały nasz zbiór można opisać przez

$$4\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi) = [0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi).$$

Warto zauważyć, że do tej pory zawsze zakładaliśmy, że $4\varphi \in [0, 2\pi)$ *zgodnie z reprezentacją geometryczną liczb zespolonych. Natomiast prawdą jest też, że*

$$4\varphi \in [2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2(k+1)\pi),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Zatem $\varphi \in [\frac{k\pi}{2}, \frac{2\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$, *a zgodnie z założeniem, że* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *(tak, jak w reprezentacji geometrycznej liczb zespolonych):*

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{11\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{17\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}] \cup [\frac{23\pi}{12}, 2\pi),$$

co już łatwo naszkicować.

Część druga:

Wielomian z warunku dla zbioru B *jest stopnia* 5, *a jego pierwiastki to* 0 *oraz pierwiastki stopnia* 4 *z jedynki, czyli* $1, i, -1, -i$. *Kąty tych ostatnich, to odpowiednio* $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. *Tak więc korzystając z części pierwszej, lub sprawdzając warunek zbioru* A *dla każdego z tych pierwiastków otrzymujemy* $A \cap B = \{0, 1, i, -1, -i\}$.

Zadanie 5.

Opisz (w postaci $a + bi$) wszystkie liczby zespolone z takie, że $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+4i}{5}$.
Za wykonanie porządnego rysunku można otrzymać połowę punktów.

Rozwiązanie 5 *Zauważmy, że* $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{z^2}{|z^2|} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$, *gdzie* φ *jest kątem liczby* z. *Łatwo sprawdzić, że liczba* $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ *jest również unormowana (znany trójkąt* $3^2 + 4^2 = 5^2$*). A zatem warunek określa jedynie kąt liczby* z, *jej promień jest zaś dowolny niezerowy. Dlatego na chwilę założymy* $a^2 + b^2 = 1$, *dzięki temu będzie się liczyć nieco milej.*

Mamy więc $(a+bi)^2 = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ *co jest równoważne parze warunków* $a^2 - b^2 = \frac{3}{5}$ *oraz* $2ab = \frac{4}{5}$. *Widzimy, że zarówno* a *jak i* b *nie może być zerem, więc otrzymujemy* $b = \frac{2}{5a}$, *a stąd* $a^2 - \left(\frac{2}{5a}\right)^2 = \frac{3}{5}$, *czyli* $a^2 - \frac{4}{25a^2} = \frac{3}{5}$ *co przekształcamy do postaci równania dwukwadratowego* $a^4 - \frac{3}{5}a^2 - \frac{4}{25} = 0$. *Rozwiązujemy równanie ulubioną metodą, np.* $\left(a^2 - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} - \frac{4}{25}$ *co daje* $\left(a^2 - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{4}$, *skąd otrzymujemy* $a^2 - \frac{3}{10} = \pm\frac{1}{2}$. *Ale wiemy, że* a^2 *nie może być ujemne, czyli* $a^2 = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$. *A zatem* $a = \pm 2\sqrt{\frac{1}{5}}$. *Dzięki temu otrzymujemy* $b = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ *o znaku zgodnym do* a.

A zatem rozwiązaniem są liczby postaci $r \cdot 2\sqrt{\frac{1}{5}} + ir \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$ *dla* $r \neq 0$, *co można zapisać jako* $x + 2xi$ *dla* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.