Zadanie 1.a

Korzystając z aksjomatów ciała wykazać, że $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Rozwiązanie 1. Najpierw wykażemy, że

$$\forall x \in \mathbf{K}: \qquad 0 \cdot x = 0 \tag{1}$$

dla dowolnego ciała $\mathbf{K}$. Przeanalizujmy ciąg równości:

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

Skorzystaliśmy kolejno z tego, że 1 jest elementem neutralnym względem mnożenia, a 0 elementem neutralnym względem dodawania i z rozdzielności dodawania względem mnożenia. Otóż:

$$x + x \cdot 0 = x$$

Z istnienia elementu przeciwnego w ciele:

$$x + (-x) + x \cdot 0 = x + (-x)$$

Skąd dostajemy, że $0 + x \cdot 0 = 0$, a więc $x \cdot 0 = 0$.
Teraz chcemy wykazać, że $(-1) \cdot (-1) = 1$. Już udowodniliśmy, że dla $x = -1$ zachodzi $-1 \cdot 0 = 0$. Prawdziwy jest ciąg równości:

$$0 = -1 \cdot 0 = -1 \cdot (1 + (-1)) = -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1),$$

gdzie kolejno skorzystaliśmy z istnienia elementu przeciwnego (a tak naprawdę, to z faktu, że $1 + (-1) = 0$, który natychmiast wynika z aksjomatów) oraz z rozdzielności dodawania względem mnożenia. Zatem

$$-1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0,$$

a po dodaniu do obydwu stron jedynki:

$$-1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 = 1.$$

Skąd $0 + (-1) \cdot (-1) = 1$, a więc mamy tezę $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Zadanie 1.b

Korzystając z aksjomatów ciała wykazać, że $((a + b) + c) + d = (a + c) + (d + b)$.

Rozwiązanie 2.

$$((a+b)+c)+d = ((a+(b+c))+d = (a+(c+b))+d = ((a+c)+b)+d = (a+c)+(b+d) = (a+c)+(d+b),$$

w kolejnych równościach korzystaliśmy z łączności oraz przemienności dodawania.

Zadanie 2

Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu stosując w opisie parametry i zmienne związane.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 2 \\ -5x_1 - 10x_2 - 14x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie 3. Zapiszmy macierz tego układu równań i sprowadźmy ją do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 2 \\ -5 & -10 & -14 & 0 \\ 4 & 8 & 11 & 1 \end{array}\right) \overset{III-(I+II)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 8 & 11 & 1 \end{array}\right) \underset{IV-2\cdot I}{\overset{II-I}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \underset{II-3IV}{\overset{I-5IV}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 28 \\ 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{I-2II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z postaci ostatniej macierzy odczytujemy, że $x_1 = 14 - 2x_2$, $x_3 = -5$. Postać ogólna rozwiązania:

$$\{(14 - 2x_2, x_2, -5) : x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Zadanie 3.

Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań nad $\mathbb{R}$ w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + ax_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 4x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2a \end{cases}$$

Rozwiązanie 4. Najpierw trochę uprościmy postać macierzy opisującej układ, sprowadzając ją do macierzy schodkowej:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & a & 0 \\ 2 & 3 & a & 4 & a \\ 1 & 2 & 5 & -3 & 2a \end{array}\right) \underset{III-I}{\overset{II-(I+III)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & (a-7) & (7-a) & -a \\ 0 & 1 & 3 & -3-a & 2a \end{array}\right)$$

Łatwo zauważamy, że jeśli $a = 7$, to schodek wypada w kolumnie wyrazów wolnych, a więc układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.
Załóżmy więc, że $a \neq 7$, wówczas żaden ze schodków nie wypada w kolumnie wyrazów wolnych, więc rozwiązanie istnieje. Zmienne x_1, x_2 i x_3 zależą od zmiennej $x_4 \in \mathbb{R}$, więc dla $a \neq 7$ jest nieskończenie wiele rozwiązań (można się o tym przekonać sprowadzając macierz do postaci schodkowej zredukowanej, ale nie musimy tego robić, aby zobaczyć, że mamy cztery zmienne niewiadome i tylko trzy schodki, więc musi być nieskończenie wiele rozwiązań).

Zadanie 4.

Niech

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 t + c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 t + c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m t + c_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych dla niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z jednym parametrem t występującym wyłącznie w wyrazach wolnych, jak widać powyżej (a_{ij}, b_i, c_i są dowolne rzeczywiste).
Udowodnij, że liczba rozwiązań tego układu jest taka sama dla wszystkich wartości parametru t oprócz być może jednej.

Rozwiązanie 5. To zadanie zrobiło mało osób, dlatego chcę przytoczyć rozwiązanie jednego z nielicznych studentów, którzy to rozwiązali. To rozwiązanie wydało mi się dość czytelne. Autor: Tomasz Olma.

Macierz rozszerzoną układu możemy zawsze sprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej. Zauważmy, że dokonując operacji elementarnych w kolumnie wyrazów wolnych dostaniemy takie elementy, że każdy z nich będzie się dało zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i t + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i$$

(suma wierszy przemnożonych przez stałą), co jest równe $t \cdot A_j + B_j$, gdzie j to numer wiersza, zaś A_j i B_j to są jakieś stałe.
Rozpatrzmy wiersze postaci $[0, 0, \ldots, 0, t \cdot A_j + B_j]$, gdzie $A_j \neq 0$. W dowolnym z nich jeżeli $t \neq -\frac{B_j}{A_j}$, to układ jest sprzeczny. Wartość $t = -\frac{B_j}{A_j}$ może (ale nie musi) prowadzić do sprzeczności w innym równaniu. W każdym razie na pewno mamy, że wszystkie wartości (z pominięciem być może jednej) dają tę samą liczbę rozwiązań (zero). Jeżeli wiersz a jakiś niezerowy element gdzie indziej niż w kolumnie wyrazów wolnych lub $A = 0$, to wartość parametru t nie wpływa na możliwość znalezienia rozwiązania.

Zadanie 5.

Opisz wszystkie równania liniowe postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b,$$

których rozwiązaniami są między innymi ciągi $(1, 2, 3, -1, 4)$ i $(3, 6, 8, -5, 7)$

Rozwiązanie 6. Traktujemy współczynniki a_i jako niewiadome, a znane nam x_i (dla $i = 1, \ldots, 5$) jako współczynniki w równaniu z treści zadania. Dostajemy układ równań opisany macierzą:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & b \\ 3 & 6 & 8 & -5 & 7 & b \end{array}\right) \overset{II-3I}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & b \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 & -2b \end{array}\right) \overset{I+3II}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 & -11 & -5b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 2b \end{array}\right)$$

Zatem wszystkie takie równania, których współczynniki należą do zbioru $\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) :$
$a_1 = -2a_2 + 7a_4 + 11a_5 - 5b, \quad a_3 = -2a_4 - 5a_5 + 2b, \text{gdzie} a_2, a_4, a_5, b \in \mathbb{R}\}$, są
takie, że ciągi $(1, 2, 3, -1, 4)$ i $(3, 6, 8, -5, 7)$ należą do zbioru rozwiązań.