Krótki wyciąg paru metod rozwiązywania zadań

Trochę się obawiamy, czy udostępniając ten plik nie wyświadczymy niektórym niedźwiedziej przysługi. Z tego powodu wyraźnie ostrzegamy, że **z tego pliku nie da się nauczyć GAL-u**, ponieważ

- Przedstawione tu metody (w liczbie ponad 50) trudno opanować na pamięć, za to dość łatwo odtworzyć, jeśli się zna stojącą za nimi teorię (której nie przedstawiliśmy — to nie skrypt).
- Cały ten plik dotyczy zadań praktycznych, które w zasadzie nie są GAL-em. (Nawet na kolokwium nie dają 100% punktów, tylko najwyżej 60%. Zresztą patrz niżej.)

Dajemy go Wam po to, żeby sobie coś powtórzyć / utrwalić / zrozumieć jakieś detale niezrozumiane na ćwiczeniach itp.

Aha, **nawet jeśli by się dało** nauczyć stąd GAL-u (na jakąś tróję), **to nie warto**, ponieważ

- Ten przedmiot ma swój urok, który zwykł się ujawniać w zadaniach typu 5 na kolokwium. Za to nie tutaj :)
- Jest to być może jedyny przedmiot na matematyce, dla którego stworzenie takiego spisu metod jest w ogóle możliwe. Lepiej od razu zacząć przestawiać się na inny sposób myślenia.

Miłej lektury! :)

1 Przestrzenie liniowe, bazy

1. Znajdź bazę i/lub wymiar przestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$**.**

1. Wpisz wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do wierszy macierzy.
2. Zeschodkuj macierz.
3. Bazę tworzą niezerowe wiersze z macierzy zeschodkowanej, a wymiar to liczność bazy.

2. Znajdź współrzędne wektora α w bazie $\beta_1, \ldots, \beta_l$.

1. Zbuduj układ równań: wpisz wektory $\beta_1, \ldots, \beta_l$ do kolumn macierzy układu; dopisz (za "kreską") kolumnę zawierającą wektor α.
2. Rozwiąż układ równań. Musi wyjść dokładnie jedno rozwiązanie i to właśnie będą szukane współrzędne.

3. Znajdź bazę i/lub wymiar podprzestrzeni w $\mathbb{R}^n$ opisanej układem równań.

1. Znajdź zbiór rozwiązań, czyli:

   (a) Wpisz równania do wierszy macierzy.

(b) Zeschodkuj macierz.

(c) **Jeśli pytają o sam wymiar, to już koniec:** jeśli r jest liczbą niezerowych wierszy, to z tw. Kroneckera-Capelliego wymiar przestrzeni rozwiązań wynosi $n - r$.

(d) Zredukuj macierz.

(e) Przejdź z powrotem do równań, wyraź zmienne związane w zależności od wolnych.

(f) Wypisz zbiór rozwiązań w odpowiedniej postaci, na przykład: $\{(x_2+2x_4, x_2, -3x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

2. Wypisz bazę przestrzeni rozwiązań — na jeden z dwóch sposobów:

   - podstaw po kolei jedynkę pod każdą zmienną wolną, a zero pod pozostałe
   - rozpisz rozwiązanie ogólne jako sumę, a w każdym składniku wyciągnij zmienną przed nawias

   Tak czy siak, w powyższym przykładzie wyjdzie $(1, 1, 0, 0)$ i $(2, 0, -3, 1)$.

3. Tak otrzymujesz bazę, a wymiar to jej wielkość.

- Jest to tylko jedna z bardzo wielu możliwych baz tej przestrzeni! (Ale liczność każdej bazy będzie taka sama — z tw. o wymiarze)

4. Podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{R}^n$ jest opisana układem równań. Opisz ją jako "lin" układu wektorów.

To się sprowadza do punktu **3**: znajdź bazę W, wtedy W jest linem tej bazy.

5. Podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{R}^n$ jest dana jako "lin" układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Opisz ją układem równań.

1. Zbuduj układ równań: wpisz wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do kolumn macierzy układu; dopisz (za "kreską") kolumnę zawierającą niewiadome $x_1, \ldots, x_k$.

2. Schodkuj macierz tak długo, aż część przed "kreską" (czyli oprócz ostatniej kolumny) będzie zeschodkowana. Na przykład:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - x_4 \end{array}\right]$$

3. W jest opisana przez układ równań typu $\diamond = 0$, dla każdego wiersza postaci $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \diamond \end{array}\right]$ w powyższej macierzy. W naszym przypadku wychodzi

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. Więc tak zbudowany układ równań opisuje W. Koniec.

6. Dana jest podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz pewien wektor α. Sprawdź, czy $\alpha \in W$.

- Jeśli W jest opisana układem, po prostu podstaw α do układu i sprawdź, czy wszystkie równania są spełnione.

- Jeśli W jest dana jako $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$:

  1. Zbuduj układ równań: wpisz wektory $\beta_1, \ldots, \beta_l$ do kolumn macierzy układu; dopisz (za "kreską") kolumnę wektor α.
  2. Zeschodkuj macierz.
  3. $\alpha \in W$ wtw, gdy układ nie jest sprzeczny, czyli gdy zeschodkowana macierz nie zawiera wiersza postaci $[\ 0 \quad \ldots \quad 0 \,|\, \neq 0\ ]$.

7. Dane są dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdź, czy $W_1 \subseteq W_2$.

1. Zrób tak, żeby W_1 było opisane jako "lin" jakiegoś układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, zaś W_2 było opisane przez pewien układ równań U (używając, jeśli jest taka potrzeba, punktów **4** i **5**)

2. Podstaw wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do układu U. $W_1 \subseteq W_2$ wtw, gdy wszystkie wektory spełniają wszystkie równania.

- Można też sprawdzać to inaczej. Na przykład, jeśli W_2 jest dane jako $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$, to można dla każdego α_i osobno sprawdzić, czy jest on kombinacją liniową wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_l$ (patrz punkt **6**).
  Uwaga niekluczowa (kto nie rozumie, niech zignoruje): w tym wariancie trzeba zeschodkować kilka podobnych do siebie macierzy:
  $$[\ \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_l \,|\, \alpha_1\ ], \qquad [\ \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_l \,|\, \alpha_2\ ] \qquad \text{i tak dalej}$$
  Można oszczędzić sobie rachunków, schodkując "zbiorczą" macierz
  $$[\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \ldots \quad \beta_l \,|\, \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_k\ ]$$
  i na koniec "wyszarpnąć" z niej po kolei te k zeschodkowanych macierzy, o które chodzi.

- Czasem warto popatrzeć na wymiary:
  - jeśli $\dim W_1 > \dim W_2$, to na pewno $W_1 \not\subseteq W_2$
  - jeśli przypadkiem $\dim W_1 = \dim W_2$, to $W_1 \subseteq W_2$ jest równoważne z $W_2 \subseteq W_1$, a to może być czasem dużo łatwiejsze do sprawdzenia.

8. Dane są dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdź, czy $W_1 = W_2$.

1. Sprawdź równość wymiarów (patrz **1** i **3**) — to jest warunek konieczny.

2. Jeśli wymiary są równe, wystarczy sprawdzić jedno zawieranie w którąkolwiek stronę (patrz **7**)

9. Wyznacz rząd macierzy A.

1. Zeschodkuj macierz — wolno używać operacji elementarnych na wierszach i na kolumnach (i dowolnie je ze sobą przeplatać).

2. Rząd = liczba niezerowych wierszy po zeschodkowaniu.

10. Podaj liczbę rozwiązań układu równań U (metoda przez tw. Kroneckera-Capelliego)

1. Niech A_u oznacza pełną macierz układu razem z kolumną za "kreską", zaś A — macierz bez tej kolumny.
2. Wyznacz rząd macierzy A oraz A_u (patrz **9**).
3. Niech n będzie liczbą kolumn macierzy A. Liczba rozwiązań wynosi:
   - 0, gdy $r(A) < r(A_u)$,
   - 1, gdy $r(A) = r(A_u) = n$,
   - ∞, gdy $r(A) = r(A_u) < n$.

11. Czy można opisać podprzestrzeń W układem r równań?

1. Znajdź wymiar W (patrz **1** i **3**).
2. Można wtedy i tylko wtedy, gdy $r \geq n - \dim W$. To wynika z tw. Kroneckera-Capelliego i warto to rozumieć oraz napisać w rozwiązaniu.

12. Opisz podprzestrzeń W układem r rownań.

1. Opisz W układem tak, jak w punkcie **5** (otrzymasz dokładnie $n - \dim W$ równań)
2. Jako brakujące $r - (n - \dim W)$ równań możesz wziąć np. kopie któregoś z otrzymanych równań, albo równanie $0 = 0$ (albo sumy otrzymanych równań, albo ich dowolne kombinacje liniowe)

13. Dopełnij wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do bazy podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^n$ [używając jakichś wektorów].

- **Jeśli $W = \mathbb{R}^n$ i nie ma ograniczeń na wektory używane do dopełnienia**, to metoda jest szczególnie prosta:
  1. Wpisz wektory $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ do wierszy macierzy.
  2. Zeschodkuj macierz.
  3. Uzupełnij bazę przez dopisanie jedynek pod brakiem schodków, na przykład:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  4. **Odpowiedź:** "Bazą W jest układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozszerzony o *(tu wymieniasz wiersze, które zostały przez Ciebie dopisane pod "kreską")*".

- **W przeciwnym razie:**
  1. Wyznacz układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_l$, których będziesz używać do dopełnienia:
     – Jeśli są jawnie podane, to je po prostu weź (ale wykreślając te z nich, które nie należą do W).
     – Jeśli jest powiedziane, że mają pochodzić z podprzestrzeni $Z = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, to bierzemy $\beta_1 = \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_2$ itd.
     – Jeśli jest powiedziane, że mają pochodzić z podprzestrzeni Z opisanej układem równań, to wyznacz bazę Z (patrz **3**) i za $\beta_1, \ldots, \beta_l$ weź tę bazę.
     (Powyższe dwa punkty będą działać tylko pod warunkiem, że $Z \subseteq W$. Raczej się nie zdarza, żeby na kolokwium tego typu zadanie pojawiło się w innej sytuacji.
     – Jeśli nic nie jest powiedziane, to weź dowolny układ rozpinający W (tzn. podstaw $Z = W$ i wykonaj któryś z dwóch powyższych kroków w zależności od tego, jak jest opisane W).
  2. Znajdź wymiar W (patrz **1** i **3**).
  3. Wpisz wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do wierszy macierzy (nazwijmy ją A).
  4. Zeschodkuj macierz A i wykreśl z niej wiersze zerowe.
  5. Wykonuj w pętli (dla kolejnych $\beta_1, \ldots, \beta_l$) następujące czynności:
     – Dopisz na końcu A wiersz z kolejnym wektorem β_i i wschodkuj go w macierz.
     – Jeśli pojawił się wiersz niezerowy, zapamiętaj, że β_i jest dobre. W przeciwnym razie wykreśl wiersz zerowy i zapamiętaj, że β_i jest złe.
     – Otrzymana macierz przejmuje rolę macierzy A.
     – Jeśli liczba wektorów α_j oraz znalezionych dotychczas dobrych β_i równa się w sumie wymiarowi W, przerwij. W przeciwnym razie kontynuuj dla następnego wektora β_{i+1}.
  6. **Odpowiedź:** "Bazą W jest układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozszerzony o *(tu wymieniasz znalezione dobre β_i)*".

14. Czy da się dopełnić wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ do bazy podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^n$ [używając jakichś wektorów] tak, żeby wektor γ miał w otrzymanej bazie współrzędne $c_1, \ldots, c_m$? Jeśli tak, zrób to.

Tu nie będzie pełnego opisu ogólnej metody. W każdym razie trzeba rozpisać sobie, co oznacza warunek na temat γ. Czyli: poszukujemy takiego dopełnienia $\beta_1, \ldots, \beta_{m-k}$, żeby zachodziło

(*) $$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k + c_{k+1}\beta_1 + c_{k+2}\beta_2 + \ldots + c_m\beta_{m-l}$$

I teraz trzeba popatrzeć i pomyśleć:

- Jeśli w zadaniu każą dopełnić, to zapewne warunek (*) wyznacza któreś spośród β_i i dalej trzeba znaleźć te pozostałe.
  Na przykład: jeśli trzeba dopełnić $(1, 1, 0)$ do bazy $\mathbb{R}^3$ tak, żeby $(3, 1, 0)$ miał w otrzymanej bazie współrzędne $(1, 2, 0)$, to szukamy wektorów dopełniających β_1, β_2, które będą spełniać
  $$(3, 1, 0) = 1 \cdot (1, 1, 0) + 2 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2,$$
  a to jest równoważne temu, że $\beta_1 = (1, 0, 0)$. W takim razie bierzemy układ
  $$\alpha_1 = (1, 1, 0), \qquad \beta_1 = (1, 0, 0)$$
  i dopełniamy go do bazy $\mathbb{R}^3$ zwyczajnie (patrz **13**).

- Jeśli w zadaniu pytają, czy da się dopełnić, to zapewne z warunku (*) wynika np., że γ musi być kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; albo wręcz przeciwnie, że nie może być ich kombinacją; albo że γ musi należeć do przestrzeni Z, z której wolno nam brać wektory $\beta_1, \beta_2, \ldots$; albo coś innego. W ten sposób można uzasadniać, że dopełnić się nie da; albo wykombinować przykład dopełnienia tak jak w uwadze powyżej.

15. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ zbiór A rozwiązań układu równań nie-całkiem-liniowych U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^n$?

1. Posprzątaj układ (zmienne na lewą stronę, stałe na prawą).

2. Podstaw $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ i sprawdź, czy równania są spełnione. Jeśli nie są, to A nie jest podprzestrzenią.

3. Podstaw takie wartości s, żeby układ był całkowicie liniowy i jednorodny (tzn. za "kreską" są wszędzie zera). Dla takich wartości A na pewno jest podprzestrzenią (bo tw. z wykładu).

4. W pozostałych sytuacjach domyślamy się, że A nie jest podprzestrzenią, ale należy to jeszcze uzasadnić. Wystarczy wskazać przykład wektora $\alpha \in A$ oraz liczby a takiej, że $a \cdot \alpha \notin A$.

5. Wyróżnij w układzie U zmienne *paskudne*, czyli uwikłane w jakąś nieliniowość.

   Na przykład: jeśli układ zawiera gdzieś wyrażenie $|x_3|$, to x_3 staje się paskudna. Jeśli zawiera gdzieś x_5^2, to x_5 staje się paskudna. I tak dalej.

6. Wymyśl dobre a. (Jeśli dobrze rozumiesz sytuację, możesz wybrać -1 albo 2, ale to nie zawsze działa. -2 jest na ogół dobrym wyborem).

7. Teraz dwie możliwości znalezienia sensownego α:

   - (prostsze rachunki, ale czasem zawodzi) Podstaw wartość 1 za wszystkie zmienne paskudne. Otrzymasz zwyczajny układ równań liniowych na wartości zmiennych nie-paskudnych, rozwiąż go zwyczajną metodą i wybierz jakiekolwiek rozwiązanie.
   - (metoda ogólna) Przekształć układ U tak, żeby wszystkie zmienne paskudne były po prawej stonie. Potraktuj U jako zwyczajny układ równań liniowych na zmienne niepa-skudne, ze zmiennymi paskudnymi w roli parametrów. Zeschodkuj teraz U i wybierz takie **niezerowe** wartości dla zmiennych paskudnych, żeby układ był niesprzeczny. Wybierz jakiekolwiek rozwiązanie.

8. Teraz napisz, że $\alpha \in A$ (nie wymaga uzasadnienia, bo to już sprawdzone), ale $a \cdot \alpha \notin A$ (co należałoby sprawdzić przez podstawienie wektora $a \cdot \alpha$ do układu U — wystarczy podstawić do tego równania, które zawiera paskudność). W takim razie A nie jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^n$.

2 Sumy, przekroje, ładne bazy

16. Znajdź bazę przestrzeni $V_1 + V_2$.

1. Znajdź bazy przestrzeni V_1 i V_2.
2. Wpisz je do wierszy macierzy, zeschodkuj.
3. Bazę $V_1 + V_2$ tworzą niezerowe wiersze otrzymanej macierzy.

17. Znajdź bazę (wymiar) przestrzeni $V_1 \cap V_2$.

- Są zasadniczo dwa sposoby: pierwszy stosuje się, gdy obie przestrzenie są opisane układem, drugi, gdy znamy bazę V_1, a V_2 jest opisane układem. Można zawsze zmienić opis V_1 lub V_2 korzystając z punktów **1**, **3** oraz **5**.
- Sposób pierwszy (zakładamy, że V_1, V_2 są opisane układem)
  1. Połącz układy opisujące V_1, V_2 w jeden wielki układ równań.
  2. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań tego układu (punkt **3**).
- Sposób drugi (zakładamy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest *bazą* V_1, zaś V_2 jest opisane układem U; jeśli V_1 jest dane jako "lin" pewnych wektorów, to należy najpierw znaleźć jego *bazę*)

  Rozważmy przykład: V_1 ma bazę $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, zaś V_2 jest opisane równaniem $2x_1 - x_3 = 0$.

  1. Wprowadź zmienne $a_1, \ldots, a_n$ i uprość wyrażenie $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$.

     $a_1(1, 2, 3) + a_2(1, 1, 1) = (a_1 + a_2, 2a_1 + a_2, 3a_1 + a_2)$.
  2. Podstaw otrzymany wektor do układu U. Uprość wszystkie równania, aby otrzymać warunki na zmienne $a_1, \ldots, a_n$.

     Podstawienie daje $2(a_1 + a_2) - (3a_1 + a_2) = 0$; po uproszczeniu: $-a_1 + a_2 = 0$.
  3. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań otrzymanego układu. Oznaczmy ją $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

     U nas $\beta_1 = (1, 1)$ i to cała baza.
  4. Dla każdego β_i oblicz wektor mający w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takie współrzędne, jak każą współczynniki β_i.

     Bierzemy $\beta_1 = (1, 1)$ i obliczamy $1 \cdot (1, 2, 3) + 1 \cdot (1, 1, 1) = (2, 3, 4)$.
  5. Bazę $V_1 \cap V_2$ tworzą wektory obliczone w poprzednim punkcie.

     Czyli $(2, 3, 4)$.
- Jeśli pytają tylko o wymiar, to na ogół prościej znaleźć $\dim(V+W)$ (punkt **16**) i skorzystać ze wzoru
$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W)$$

18. Czy $V = W \oplus Z$?

Odpowiedź na to pytanie wymaga sprawdzenia *dowolnych dwóch* spośród poniższych trzech warunków (bo wtedy trzeci też musi zajść). Na ogół najprościej sprawdzić pierwszy i ostatni.

- Czy $V = W + Z$?
- Czy $W \cap Z = \{0\}$?
- Czy $\dim V = \dim W + \dim Z$?

19. Dane są przestrzenie $W \subseteq V$. Znajdź Z takie, że $V = W \oplus Z$.

- Znajdź bazę W.
- Dopełnij ją do bazy V (punkt **13**).
- Przykładowym dobrym Z jest "lin" wektorów dopełniających bazę do bazy.

Definicja do wewnętrznego użytku. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V, i niech V_1 będzie podprzestrzenią V. Powiedzmy, że $\mathcal{B}$ *widzi* V', jeśli spośród wektorów $\mathcal{B}$ można wybrać część tak, by otrzymać bazę V'. (W dalszej części zobaczycie, że często warto jest pracować z bazami, które widzą podprzestrzenie podane w treści zadania. A w takim razie trzeba umieć znajdować takie bazy.)

20. Dane są przestrzenie $V_1 \subseteq V$. Znajdź bazę V widzącą V_1.

1. Znajdź bazę V_1.
2. Dopełnij ją do bazy V (punkt **13**).
3. Otrzymana w ten sposób baza V jest dobra.

21. Dane są przestrzenie $V_1, V_2 \subseteq V$. Znajdź bazę V widzącą równocześnie V_1 oraz V_2.

1. Znajdź bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ przestrzeni $V_1 \cap V_2$.
2. Dopełnij wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ do bazy V_1 wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_j$ (punkt **13**).
3. Dopełnij wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ do bazy V_2 wektorami $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (j. w.).
4. Dopełnij wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$, $\beta_1, \ldots, \beta_j$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ do bazy V wektorami $\delta_1, \ldots, \delta_l$ (j. w.).
   Nie jest oczywiste, że się da. Dokładniej, nie jest oczywiste, że cały układ $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_1, \ldots$ jest niezależny. Można to jednak udowodnić i to jest zrobione w ramach dowodu tw. 3.32 w skrypcie. Warto ten dowód rozumieć. Warto też wiedzieć, że to nie działa dla trzech przestrzeni, tzn. gdybyśmy mieli jeszcze V_3 i chcieli obliczyć $\alpha_1, \ldots$ jako bazę $V_1 \cap V_2 \cap V_3$, a potem $\beta_1, \ldots$ oraz $\gamma_1, \ldots$ jak wyżej i wreszcie $\eta_1, \ldots$ jako dopełnienie $\alpha_1, \ldots$ do bazy V_3, to wektory $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_1, \ldots, \eta_1, \ldots$ wszystkie razem *nie musiałyby* być niezależne. Co więcej, może się nie dać znaleźć bazy widzącej V_1, V_2 i V_3 naraz.
5. Dobrą bazą jest $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$, $\beta_1, \ldots, \beta_j$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, $\delta_1, \ldots, \delta_l$. Mianowicie:
   Bazą V_1 jest $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$, $\beta_1, \ldots, \beta_j$, zaś bazą V_2 jest $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.

22. Wykaż, że V posiada bazę widzącą podprzestrzeń V_1 (oraz V_2).

W pewnych zadaniach trzeba skorzystać z istnienia takiej bazy, bez wyliczania konkretnych jej wektorów. Jednak takiego twierdzenia nie było na wykładzie, więc należałoby (zwięźle) napisać przynajmniej, jak się uzyskuje taką bazę. Napisz z grubsza taki opis konstrukcji, jak my powyżej (odpowiednio w p. **20** lub **21**).

3 Przekształcenia, ich macierze, mnożenie macierzy

23. Sprawdź, czy przekształcenie φ jest liniowe.

1. Sprawdź, czy $\varphi(0) = 0$.
2. Sprawdź, czy $\varphi(a \cdot \alpha) = a \cdot \varphi(\alpha)$.
3. Sprawdź, czy $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$.

24. Mając dany wzór na φ, znajdź jego macierz (w bazach st.). Albo na odwrót.

Współczynniki ze wzoru mechanicznie do *wierszy* macierzy (por. p. 25). Przykład:

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3) \qquad \longleftrightarrow \qquad M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

25. Wartościami przekształcenia φ na *bazie* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Znajdź wzór na φ (albo macierz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$).

1. Zbuduj macierz $\left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \alpha_n & \beta_n \end{array}\right]$.
2. Zeschodkuj i zredukuj. Otrzymasz macierz postaci $\left[\begin{array}{c|c} \ I\ & \ A\ \end{array}\right]$.
3. Odczytaj wynik:
   - $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$ jest macierzą *transponowaną* do A.
   - Wzór na φ uzyskasz przepisując mechanicznie współczynniki A z *kolumn* (por. p. 24).

26. Czy istnieje przekształcenie liniowe φ takie, że $\varphi(\alpha_1) = \beta_1$, $\varphi(\alpha_2) = \beta_2$ itd.? (Podaj przykład).

1. Zbuduj macierz $\left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \alpha_n & \beta_n \end{array}\right]$ i zeschodkuj ją.
2. Jeśli pojawi się wiersz postaci $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \text{nie-same-zera} \end{array}\right]$, φ nie istnieje. W przeciwnym razie φ istnieje.
3. Jeśli proszą o podanie przykładu φ poprzez zadanie wartości na bazie, to:
   (a) Wykreśl z macierzy wiersze zerowe.
   (b) Jeśli lewy segment macierzy jest kwadratowy, to koniec.
   Dokładniej: każdy wiersz postaci $\left[\begin{array}{c|c} \gamma & \delta \end{array}\right]$ oznacza, że $\varphi(\gamma) = \delta$, i wszystkie tak uzyskane równości zadają φ na pewnej bazie.

   (c) Jeśli lewy segment nie jest kwadratowy, dopełnij jego wiersze do bazy do $\mathbb{R}^n$ wektorami $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Następnie dopisz do macierzy wiersze postaci $\left[\begin{array}{c|c} \eta_i & 0 \end{array}\right]$, po czym wykonaj krok (b).

4. Jeśli proszą o podanie wzoru na φ, lub macierzy w bazach st., wykonaj krok 3, a potem punkt **25**.

27. Oblicz iloczyn macierzy $A \circ B$.

Opowieści nie będzie. (Bez przesady :). Ale będzie rysunek:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & B & & \\
 & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & ? & 2 & ? & ? \\
 & & & & ? & 15 & ? & ? \\
\hline
 & & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\
A & & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\
 & \to & 3 & 20 & ? & 3 \cdot 2 + 20 \cdot 15 & ? & ?
\end{array}
$$

28. Odwróć macierz A.

1. Zbuduj macierz blokową postaci $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$.

2. Zeschodkuj i zredukuj — otrzymasz $\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$.

29. Znajdź macierz A, jeśli wiadomo, że $A \circ B = C$ (albo $D \circ A = E$).

Równanie na macierzach można pomnożyć stronami przez macierz — *z lewej albo z prawej strony*, bo mnożenie macierzy jest nieprzemienne! Zatem:

$$
\begin{aligned}
AB = C \quad &\Leftrightarrow \quad ABB^{-1} = CB^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A = CB^{-1}, \\
DA = E \quad &\Leftrightarrow \quad D^{-1}DA = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad A = D^{-1}E.
\end{aligned}
$$

I dalej korzystamy z punktów **27** i **28**.

30. Znając bazę $\mathcal{B}$, oblicz $M(\mathrm{id})^{\mathrm{st}}_{\mathcal{B}}$. Albo $M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}}$. Albo na odwrót.

- Przejście między bazą $\mathcal{B}$ a macierzą $M(\mathrm{id})^{\mathrm{st}}_{\mathcal{B}}$ jest mechaniczne przez wpisanie wektorów do kolumn. Przykład:

$$
\mathcal{B}: \qquad (1,2), \quad (3,4) \qquad \longleftrightarrow \qquad M(\mathrm{id})^{\mathrm{st}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

- Macierze $M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}}$ i $M(\mathrm{id})^{\mathrm{st}}_{\mathcal{B}}$ są wzajemnie odwrotne.

Oznaczenie do wewnętrznego użytku. Oznaczmy przez $\alpha^{\mathcal{A}}$ współrzędne wektora α w bazie $\mathcal{A}$. Przez $[\beta]$ oznaczamy macierz utworzoną przez wpisanie wektora β do pojedynczej kolumny (nie wiersza!) macierzy.

Dwa kluczowe wzory o macierzach przekształceń.

$$M(\psi \circ \varphi)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}} = M(\psi)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \circ M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}, \qquad \left[\varphi(\alpha)^{\mathcal{B}}\right] = M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \circ \left[\alpha^{\mathcal{A}}\right]$$

Ten drugi można stosować dla wielu wektorów naraz (co zresztą dowodzi poprawności tego pierwszego :) :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \varphi(\alpha_1)^{\mathcal{B}} & \dots & \varphi(\alpha_n)^{\mathcal{B}} \end{array}\right] = M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \circ \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1^{\mathcal{A}} & \dots & \alpha_n^{\mathcal{A}} \end{array}\right]$$

31. Znajdź macierz przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, czyli $M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

- Jeśli $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}$ jest bazą st, patrz punkt 30.
- Jeśli obie są niestandardowe, to

$$M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}}\, M(\mathrm{id})^{\mathrm{st}}_{\mathcal{A}}.$$

32. Znając $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, oblicz $M(\varphi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$.

- Zrozum, co masz zrobić: nie zmienić przekształcenia, tylko bazy — zatem użyć odpowiednich macierzy przejścia:

$$M(\varphi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id})^{?}_{?}\, M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\, M(\mathrm{id})^{?}_{?}$$

- Dobierz bazy tak, żeby się zgadzało:

$$M(\varphi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id})^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}\, M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\, M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}$$

33. Znając $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ i $\alpha^{\mathcal{C}}$, wyznacz $\varphi(\alpha)^{\mathcal{D}}$.

Podobnie jak przed chwilą:

- $\left[\varphi(\alpha)^{\mathcal{D}}\right] = M(\mathrm{id})^{?}_{?}\ M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\ M(\mathrm{id})^{?}_{?}\ \left[\alpha^{\mathcal{C}}\right]$
- $\left[\varphi(\alpha)^{\mathcal{D}}\right] = M(\mathrm{id})^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}\ M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\ M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}\ \left[\alpha^{\mathcal{C}}\right]$

34. Znając $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ i $M(\psi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$, wyznacz $M(\psi \circ \varphi)^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$.

Podobnie jak w dwóch poprzednich punktach:

- $M(\psi \circ \varphi)^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = M(\mathrm{id})^{?}_{?}\ M(\psi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}\ M(\mathrm{id})^{?}_{?}\ M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\ M(\mathrm{id})^{?}_{?}$
- $M(\psi \circ \varphi)^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = M(\mathrm{id})^{\mathcal{F}}_{\mathcal{D}}\ M(\psi)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}\ M(\mathrm{id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\ M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\ M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}}$

35. Czy istnieje takie α, że $\varphi(\alpha) = \beta$? (Podaj przykład).

Wystarczy skorzystać z równoważności:

$$\varphi(\alpha)=\beta \quad\Leftrightarrow\quad M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}\circ\begin{bmatrix}\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \text{ jest rozwiązaniem układu o macierzy } \left[\begin{array}{c|c} M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} & \beta \end{array}\right].$$

Jeśli jakimś dziwnym trafem byłoby to przydatne, można skorzystać z uogólnienia:

$$\varphi(\alpha)=\beta \quad\Leftrightarrow\quad M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\circ\begin{bmatrix}\alpha^{\mathcal{A}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta^{\mathcal{B}}\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^{\mathcal{A}} \text{ jest rozwiązaniem układu o macierzy } \left[\begin{array}{c|c} M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} & \beta^{\mathcal{B}} \end{array}\right].$$

36. Wyznacz rzut na V wzdłuż W / symetrię względem V wzdłuż W.

1. Znajdź bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni V oraz bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni W.
2. Teraz są dwa sposoby:
   - Znajdź przekształcenie φ zadane na bazie przez warunki (patrz p. 26)

     $$\varphi(\alpha_1)=\alpha_1,\ \dots,\ \varphi(\alpha_i)=\alpha_i,\quad \varphi(\beta_1)=0,\ \dots,\ \varphi(\beta_j)=0 \qquad \text{(dla rzutu)}$$
     $$\varphi(\alpha_1)=\alpha_1,\ \dots,\ \varphi(\alpha_i)=\alpha_i,\quad \varphi(\beta_1)=-\beta_1,\ \dots,\ \varphi(\beta_j)=-\beta_j \qquad \text{(dla symetrii)}$$

   - Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{C}$ połączoną bazę $\alpha_1,\dots,\alpha_i,\ \beta_1,\dots,\beta_j$, to φ jest zadane przez

     $$M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&\\&&&&0\end{bmatrix}\ \text{(rzut)},\qquad M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&-1&\\&&&&-1\end{bmatrix}\ \text{(symetria)}$$

     (W obu przypadkach jedynek w pierwszym segmencie ma być tyle, ile wektorów $\alpha_1,\dots,\alpha_i$).
     A potem zależnie od potrzeby można wyliczyć macierz φ w innych bazach.

37. Znajdź rząd przekształcenia φ.

1. Znajdź macierz przekształcenia φ (w dowolnych bazach).
2. Oblicz jej rząd (patrz p. 9) — to jest szukany rząd φ.

38. Znajdź bazę (wymiar) $\ker\varphi$.

- Jeśli znamy macierz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$ (albo ogólniej — jakąkolwiek macierz postaci $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{B}}$), to:
  1. Zbuduj macierz $\left[\begin{array}{c|c} M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{B}} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \end{array}\right]$.
  2. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu równań o tej macierzy — jest to baza $\ker\varphi$.
- Jeśli znamy macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathcal{A}$ nie jest standardowa, to:
  Rozpatrzymy dwa przykłady; w obu będzie zachodzić $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}3&-1\\6&-2\end{bmatrix}$. W pierwszym $\mathcal{A}$ jest bazą w $\mathbb{R}^2$ zawierającą $(3,4)$ oraz $(5,6)$. W drugim $\mathcal{A}$ jest bazą st^* w przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^*$. Baza $\mathcal{B}$ nie będzie nam potrzebna.

1. Zbuduj macierz $\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$.
2. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu równań o tej macierzy — oznaczmy ją $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.
   W obu przykładach wychodzi $\gamma_1 = (3, 1)$.
3. Dla każdego i, oblicz wektor mający w bazie $\mathcal{A}$ takie współrzędne, jak każą współczynniki γ_i.
   Bierzemy $\gamma_1 = (3, 1)$ i obliczamy: w pierwszym przykładzie $3 \cdot (3, 4) + 1 \cdot (5, 6) = (14, 18)$; w drugim $3 \cdot \varepsilon_1^* + 1 \cdot \varepsilon_2^*$ upraszcza się po prostu do $3\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*$; jest to funkcjonał $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o macierzy $[3 \quad 1]$ i wzorze $\psi\big((x_1, x_2)\big) = 3x_1 + x_2$.
4. Bazę $\ker \varphi$ tworzą wektory obliczone w poprzednim punkcie.

– Zamiast tego wszystkiego można by obliczyć macierz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{B}}$ i zastosować pierwszą metodę, jednak to wymagałoby obliczenia trudnej macierzy przejścia $M(\mathrm{id})_{\mathrm{st}}^{\mathcal{A}}$, więc może się nie opłacić. Poza tym w pewnych przestrzeniach (np. $(\mathbb{R}^n)^*$) ściśle rzecz biorąc nie ma czegoś takiego jak baza standardowa i wtedy tak się w ogóle nie da.

39. Znajdź bazę $\operatorname{im} \varphi$.

Jest to w pewien sposób podobne do poprzedniego punktu.

- Jeśli znamy macierz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$ (albo ogólniej — jakąkolwiek macierz postaci $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathrm{st}}$), to:

  1. Zeschodkuj macierz transponowaną $\big(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathrm{st}}\big)^T$.
  2. Bazę $\operatorname{im} \varphi$ tworzą niezerowe wiersze otrzymanej macierzy.

- Jeśli znamy macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathcal{B}$ nie jest standardowa, to:
  Ponownie rozpatrzymy dwa przykłady dla $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{smallmatrix}\right]$. W pierwszym $\mathcal{B}$ jest bazą w $\mathbb{R}^2$ zawierającą $(7, 8)$ oraz $(9, 10)$. W drugim $\mathcal{B}$ jest bazą st^* w przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^*$. Tym razem $\mathcal{A}$ nie będzie nam potrzebna.

  1. Zeschodkuj macierz transponowaną $\big(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\big)^T$.
     W obu przykładach: $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
  2. Wypisz niezerowe wiersze otrzymanej macierzy — oznaczmy je $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.
     W obu przykładach: $\gamma_1 = (-1, -2)$.
  3. Dla każdego i, oblicz wektor mający w bazie $\mathcal{A}$ takie współrzędne, jak każą współczynniki γ_i.
     Bierzemy $\gamma_1 = (-1, -2)$ i obliczamy: w pierwszym przykładzie $(-1) \cdot (7, 8) + (-2) \cdot (9, 10) = (-25, -28)$; w drugim $-\varepsilon_1^* - 2\varepsilon_2^*$, czyli funkcjonał o macierzy $[-1 \quad -2]$ i wzorze $\psi\big((x_1, x_2)\big) = -x_1 - 2x_2$.
  4. Bazę $\operatorname{im} \varphi$ tworzą wektory obliczone w poprzednim punkcie.

40. Niech $\varphi : V \to W$ oraz $V_1 \subseteq V$. Znajdź bazę $\varphi(V_1)$.

- Jeśli φ jest dane wzorem lub macierzą postaci $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathrm{st}}$, to:

  1. Znajdź bazę V_1 (lub dowolny układ rozpinający V_1) — niech będzie to $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

2. Oblicz wartości $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$.
   Jeśli dysponujesz macierzą $M(\varphi)^{\mathrm{st}}_{\mathcal{A}}$ oraz współrzędnymi wektorów α_i w bazie $\mathcal{A}$, możesz to elegancko zrobić mnożąc macierze:
$$\left[\begin{array}{c|c|c} \varphi(\alpha_1) & \ldots & \varphi(\alpha_n) \end{array}\right] = M(\varphi)^{\mathrm{st}}_{\mathcal{A}} \circ \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1^{\mathcal{A}} & \ldots & \alpha_n^{\mathcal{A}} \end{array}\right]$$
3. $\varphi(V_1)$ jest rozpięte przez znalezione przed chwilą wektory. Zatem aby wyznaczyć bazę, wpisz je do wierszy macierzy, zeschodkuj i wybierz niezerowe wiersze.

- Jeśli φ jest dane przez macierz $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest niestandardowa, to wykonaj powyższy algorytm i na końcu przebazuj odpowiednio wyniki. (Tak jak w kroku 3 w punkcie **39**).

41. Czy $\varphi : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ jest mono/epi/izo?

1. Wyznacz liczby a i b. (To jest puste polecenie, chyba że φ jest zadane przez macierz; wówczas a jest liczbą jej *kolumn*, a b liczbą *wierszy*).
2. Wyznacz rząd r przekształcenia φ (patrz p. **37**).
3. φ jest:
$$\text{mono} \Leftrightarrow r = a, \qquad \text{epi} \Leftrightarrow r = b, \qquad \text{izo} \Leftrightarrow r = a = b.$$

- Zauważ, że czasem nie ma czego liczyć, np. jeśli pytają, czy φ jest mono, podczas gdy $a > b$.

42. Dane są ψ i χ. Czy istnieje φ liniowe takie, że $\psi \circ \varphi = \chi$? Albo takie, że $\varphi \circ \psi = \chi$? (Podaj przykład).

Kluczem do rozwiązania jest następujący fakt: dwa przekształcenia są równe $\Leftrightarrow$ mają zgodne wartości na pewnej bazie.

- Czy istnieje φ takie, że $\psi \circ \varphi = \chi$?
  1. To jest równoważne temu, żeby dla każdego i zachodziło $\psi\big(\varphi(\varepsilon_i)\big) = \chi(\varepsilon_i)$.
  2. Dla każdego i sprawdź, czy istnieje α_i takie, że $\psi(\alpha_i) = \chi(\varepsilon_i)$ (patrz p. **35**).
  3. Jeśli któreś α_i nie istnieje, to φ nie istnieje.
     Jeśli wszystkie istnieją, to przykładowe φ jest zadane na bazie standardowej warunkami $\varphi(\varepsilon_i) = \alpha_i$.
- Czy istnieje φ takie, że $\varphi \circ \psi = \chi$?
  1. To jest równoważne temu, żeby dla każdego i zachodziło $\varphi\big(\psi(\varepsilon_i)\big) = \chi(\varepsilon_i)$.
  2. Oblicz wszystkie $\psi(\varepsilon_i)$ i otrzymasz sytuację dokładnie jak w punkcie **26**.

43. Czy istnieje przekształcenie $\varphi : V \to W$ takie, że [i tu bardzo różne warunki]? (Podaj przykład).

Zwróć uwagę, że warunki w zadaniach trafiają się naprawdę różne — np. takich typów:

(a) $\varphi(\alpha) = \beta$

(b) $\varphi(V_1) \subseteq W_1$

(c) $\varphi(V_1) = W_1$ (to jest na ogół trudniejsze niż (b))

(d) $\varphi(V_1) = 0$ (to wyjątkowo nie jest trudniejsze niż (b), bo się do (b) sprowadza :)

(e) rząd φ wynosi k

(f) $\dim\ker\varphi$ wynosi l (to się sprowadza do (e))

(g) $\psi \circ \varphi = 0$ (to się sprowadza do (b))

(h) $\varphi \circ \psi = 0$ (to się sprowadza do (d))

(i) $\ker\varphi = V_1$ (to można sprowadzić do połączenia (d) i (e))

Zatem zadanie może wystąpić w naprawdę wielu smakach i ogólnej metody nie będzie. Ale będzie kilka wskazówek:

- Staraj się sprowadzić warunki dotyczące φ do dogodnej dla Ciebie postaci (wskazówki odnośnie tego podaliśmy powyżej).
- Staraj się znaleźć bazy widzące wszystkie podprzestrzenie w zadaniu (patrz p. **20**, **21**, **22**).
- Jeśli w jednej przestrzeni żyją dwie podprzestrzenie i nie jest jasne, jaki jest wymiar ich przecięcia — staraj się rozważyć po kolei wszystkie możliwe przypadki (zresztą zapewne przyda Ci się to podczas budowania ładnych baz).
- Często przydaje się wzór
$$\dim\operatorname{im}\varphi = \dim V - \dim\ker\varphi, \qquad \text{gdzie } V \text{ oznacza dziedzinę przekształcenia } \varphi$$
- Często ten wzór trzeba stosować dla *obcięcia* φ do pewnej podprzestrzeni V_1, wtedy ma on postać
$$\dim\varphi(V_1) = \dim V_1 - \dim(\ker\varphi \cap V_1),$$
ponieważ z definicji jądra wynika natychmiast, że $\ker(\varphi|_{V_1}) = \ker\varphi \cap V_1$.

44. Dana jest podprzestrzeń $V_1 \subseteq V$ oraz baza $\mathcal{B}$ widząca V_1. Wyraź warunek $\alpha \in V_1$ poprzez współrzędne $\alpha^{\mathcal{B}}$.

1. Wypisz, które wektory z bazy $\mathcal{B}$ rozpinają V_1.
   Niech na przykład $\dim V = 10$ oraz $V_1 = \operatorname{lin}(\beta_2, \beta_3, \beta_5)$.
2. Wektor α należy do $V_1 \Leftrightarrow$ współrzędne odpowiadające *pozostałym* wektorom z $\mathcal{B}$ są zerowe.
   W naszym przykładzie: $\alpha \in V_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{\mathcal{B}} = (*, 0, 0, *, 0, *, *, *, *, *)$.

45. Znajdź wymiar przestrzeni przekształceń $\varphi : V \to W$ takich, że...

- Jeśli pytają o całą przestrzeń $\dim L(V, W)$, to jej wymiarem jest $\dim V \cdot \dim W$.
- Jeśli pytają o przestrzeń $\varphi : V \to W$ takich, że $\varphi(V_1) \subseteq W_1$ itd., to:
  1. Opisz, jak uzyskać bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni V widzącą wszystkie V_i (patrz p. **22**).

2. Opisz, jak uzyskać bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni W widzącą wszystkie W_i (j. w.).
3. Narysuj ogólną postać macierzy $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, na początku wypełnij ją gwiazdkami.
   Jeśli byłaby to macierz rozmiaru 15×28, to wyróżnij w niej istotne bloki, zamiast wypisywać 420 gwiazdek.
4. Dla każdego warunku postaci $\varphi(V_i) \subseteq W_i$:
   (a) Sprawdź, które wektory z $\mathcal{A}$ rozpinają V_i.
   (b) Jeśli $\alpha_k \in V_i$, to nanieś w k-tej kolumnie macierzy odpowiednie zera.
   Dokładniej: wyznacz warunek nałożony na k-tą kolumnę stosując metodę z punktu 44 dla bazy $\mathcal{B}$ oraz przestrzeni W_i. Uwaga: jeśli zawieranie $\varphi(V_1) \subseteq W_1$ dopuszcza gdzieś gwiazdkę, a zawieranie $\varphi(V_2) \subseteq W_2$ każe wpisać zero, to oczywiście wygrywa zero. („$a \in \mathbb{R}$ i $a = 0$" jest równoważne z „$a = 0$", a nie z „$a \in \mathbb{R}$")
5. Policz gwiazdki. (Te pojedyncze; blok rozmiaru 3×7 to 21 prawdziwych gwiazdek).

46. Dane są macierze A i B. Czy istnieją takie X, Y odwracalne, że $B = X \circ A \circ Y$? (Podaj przykład).

- Istnieją $\Leftrightarrow$ rzędy macierzy A i B są równe (patrz p. 9).
- Jak je znaleźć, jeśli istnieją — w przypadku, gdy B jest ładna (podobna do I):
  1. Narysuj takie coś (rysunek dla A rozmiaru 3×5):

$$\begin{array}{ccc|ccccc} & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & A & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array}$$

  2. Przy pomocy operacji elementarnych na wierszach i kolumnach przerób A na B. Każdą operację na wierszach wykonuj zarazem na macierzy dopisanej z lewej. Każdą operację na kolumnach wykonuj zarazem na macierzy dopisanej z góry.
     W każdej chwili Twoich obliczeń, jeśli po lewej jest X, a na górze Y, to w środku jest $X \circ A \circ Y$.
  3. Na końcu rachunków macierz po lewej jest dobrym X, a macierz na górze dobrym Y.
- Gdy B jest brzydka, możesz mieć problem z przerobieniem A na B. Wtedy możesz tak:
  1. Wymyśl jakąś ładną macierz C i na marginesie przerób B na C (bez macierzy towarzyszących).
     Najładniejsza macierz 3×5 to $\left[\begin{smallmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{smallmatrix}\right]$.
  2. Teraz, tak jak w poprzednim wariancie, rozpocznij od A z towarzyszącymi identycznościami. Przerób A na C, a potem C na B wykonując kroki odwrotne do tych wykonanych w kroku 1. (Oczywiście cały czas wykonując operacje również na towarzyszach).
  3. Wynik odczytujesz tak samo jak powyżej.

47. Niech $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$. Czy istnieją takie bazy $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = B$? (Podaj przykład).

- Istnieją $\Leftrightarrow$ macierze A i B mają równe rzędy (patrz p. 9).

1. Zauważ, że warunek $B = M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ jest równoważny takiemu:
$$B = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}\ M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\ M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$$
Macierz w środku to po prostu A, a te po bokach masz znaleźć.
2. Użyj metody z p. 46, aby znaleźć X, Y takie, że
$$B = X\,A\,Y.$$
3. Aby wyznaczyć $\mathcal{D}$, zauważ, że $X = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = M(\mathrm{id})_{\mathrm{st}}^{\mathcal{D}}\ M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathrm{st}}$. W tym równaniu dwie macierze są znane, a trzecia szukana. Pozostaje zastosować punkty 29 oraz 30.
4. Podobnie wyznacz $\mathcal{C}$.

- Przed rozpoczęciem rachunków warto je zaplanować — w celu uniknięcia np. mozolnego obliczania $(A^{-1})^{-1}$;)

48. Przedstaw macierz A jako iloczyn macierzy elementarnych.

1. Zeschodkuj i zredukuj A, wykonując *pojedyncze* operacje elementarne na wierszach.
Przykład: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = E_1 \circ E_2 \circ \ldots \circ E_k$, gdzie E_i jest macierzą operacji elementarnej *odwrotnej* do tej wykonanej w i-tej kolejności.
W przykładzie: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4 Przestrzenie sprzężone

Kluczowe wzory związane z przestrzeniami sprzężonymi.

(1) $$\alpha_i^*(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = j, \\ 0 & \text{jeśli } i \neq j \end{cases}$$ (to jest definicja α_i^*)

(2) $$F^*(\varphi) = \varphi \circ F,$$ (to jest definicja F^*)

(3) $$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*,$$ (wniosek z (2))

(4) $$\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*},$$ (wniosek z (2))

(5) $$(F^{-1})^* = (F^*)^{-1},$$ (wniosek z (3) i (4), albo z (6) :)

(6) $$M(F^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = \left(M(F)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T,$$ (uwaga na kolejność baz!)

(7) $$M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}^*}^{\mathrm{st}} = \left(M(\mathrm{id})_{\mathrm{st}}^{\mathcal{B}}\right)^T = \left(\left(M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathrm{st}}\right)^{-1}\right)^T$$ (a to wniosek z (6))

Najważniejsze są (6) i (7). Warto też znać macierzowe odpowiedniki (3) i (5):

(8) $$(A \circ B)^T = B^T \circ A^T, \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

49. Mając bazę $\mathcal{B}$, znajdź bazę $\mathcal{B}^*$. Albo na odwrót.

Skorzystaj ze wzoru (7). Związek miedzy bazą a macierzą przejścia — patrz p. **30**.

50. Wektor α ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $(a_1, \ldots, a_n)$, a funkcjonał φ ma w $\mathcal{B}^*$ współrzędne $(c_1, \ldots, c_n)$. Ile wynosi $\varphi(\alpha)$?

Wynosi $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$. Zrozumienie tego pomaga zrozumieć dalsze metody.

51. Znajdź funkcjonał φ mający w bazie $\mathcal{B}^*$ współrzędne $(a_1, \ldots, a_n)$.

Można przejść przez punkt **49**. Ale będzie troche mniej rachunków, jak się zauważy, że φ jest zadane przez warunki:

$$\varphi(\beta_1) = a_1, \quad \varphi(\beta_2) = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(\beta_n) = a_n.$$

Dalej wystarczy zastosować metodę z punktu **25**; początkowa macierz w tej metodzie będzie wyglądać tak:

$$\left[\begin{array}{c|c} \beta_1 & a_1 \\ \hline \beta_2 & a_2 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \beta_n & a_n \end{array}\right]$$

52. Znajdź współrzędne funkcjonału φ w bazie $\mathcal{B}^*$.

Szukanymi współrzędnymi są po prostu wartości $\varphi(\beta_1)$, $\varphi(\beta_2)$, $\ldots$, $\varphi(\beta_n)$.
Uzasadnienie: szukamy $a_1, \ldots, a_n$ takich, że

$$\varphi = a_1\beta_1^* + a_2\beta_2^* + \ldots + a_n\beta_n^*.$$

To jest równość funkcjonałów, czyli przekształceń liniowych. Można nakarmić te przekształcenia dowolnym wektorem i wtedy mają wyjść takie same wyniki. Nakarmmy wektorem β_1:

$$\varphi(\beta_1) = \left(a_1\beta_1^* + a_2\beta_2^* + \ldots + a_n\beta_n^*\right)(\beta_1) = a_1\beta_1^*(\beta_1) + a_2\beta_2^*(\beta_1) + \ldots + a_n\beta_n^*(\beta_1) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_1.$$

(porównaj z punktem **50**). Więc a_1 *musi* być równe $\varphi(\beta_1)$! I tak dalej.

53. Dana jest macierz $M(F)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Znajdź macierz $M(F^*)_{\mathcal{D}^*}^{\mathcal{C}^*}$.

- Z (6) wywnioskuj, że $M(F^*)_{\mathcal{D}^*}^{\mathcal{C}^*} = \left(M(F)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}\right)^T$.
- Oblicz $M(F)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ przy pomocy metody z punktu **32**.

54. Znajdź jądro F^* / obraz F^* / obraz jakiejś podprzestrzeni przy F^*.

- Znajdź macierz przekształcenia F^* w jakichś bazach (najlepiej w bazach st*).
- Teraz użyj odpowiedniej metody z punktów **38**, **39**, **40**. (Przeczytaj opisy przykładów w tych punktach).