Twierdzenia o mono/epimorficzności przekształcenia sprzężonego

Niech
$$F : V \longrightarrow W$$
będzie przekształceniem liniowym między dwoma przestrzeniami *dowolnego wymiaru.* Rozpatrujemy przekształcenie sprzężone
$$F^* : W^* \longrightarrow V^*.$$
Przypomnijmy, że jest ono określone następująco:
$$F^*(\varphi) = \varphi \circ F \qquad \text{dla } \varphi \in W^*.$$

Twierdzenie 1. *F^* jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy F jest epimorfizmem.*

Twierdzenie 2. *F^* jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy F jest monomorfizmem.*

Prosty dowód twierdzeń — tylko dla sytuacji $\dim V, \dim W < \infty$

Niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą odpowiednio bazami V, W. Mamy wówczas
$$M(F^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} = \left(M(F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)^T,$$
zatem jeśli macierz $M(F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ ma a kolumn, b wierszy i rząd r, to macierz $M(F^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*}$ ma b kolumn, a wierszy i rząd r. Wobec tego
$$F^* \text{— monomorfizm} \iff r = b \iff F\text{— epimorfizm},$$
$$F\text{— epimorfizm} \iff r = a \iff F\text{— monomorfizm}.$$
To kończy dowód w przypadku, gdy wymiary V i W są skończone. W innej sytuacji dowód nie zadziała, bo nie bylibyśmy w stanie zbudować macierzy przekształceń F, F^*.

Ogólny dowód twierdzenia 1

Naszym celem jest wykazanie równoważności dwóch warunków:

(i) F^* jest monomorfizmem (równoważnie: $\ker F^*$ zawiera wyłącznie 0);

(ii) F jest epimorfizmem (równoważnie: $\operatorname{im} F$ jest równe całemu W).

1. Rozpoczniemy od przeformułowania warunku (i) do przystępniejszej postaci. Zauważmy, że z definicji F^* mamy równoważności
$$\varphi \in \ker F^* \iff F^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ F = 0 \iff \varphi(\operatorname{im} F) = 0 \qquad \text{dla } \varphi \in W^*.$$
Wobec tego warunek (i) jest równoważny takiemu:

(i') Funkcjonał $\varphi = 0$ jest jedynym w W^* takim, że $\varphi(\operatorname{im} F) = 0$.

Pozostaje pokazać równoważność (ii) $\Leftrightarrow$ (i').

2. Jeśli zachodzi (ii), to $\operatorname{im} F = W$, a wówczas warunek $\varphi(\operatorname{im} F) = 0$ oznacza, że φ zeruje się na całym W, tzn. jest funkcjonałem zerowym. Zatem (ii) $\Rightarrow$ (i').

3. Pozostało (ii) $\Leftarrow$ (i'), co jest nieco trudniejsze. Rozumujemy przez sprzeczność. Załóżmy, że $\operatorname{im} F \neq W$; chcemy pokazać, że istnieje $\varphi \neq 0$ takie, że $\varphi(\operatorname{im} F) = 0$.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie bazą $\operatorname{im} F$. Ponieważ $\operatorname{im} F \neq W$, wektory te można dopełnić wektorami $\beta_1, \dots, \beta_l$ do bazy W, przy czym $l \geq 1$. Określamy $\varphi : W \to K$ na otrzymanej w ten sposób bazie:

$$\begin{array}{cccc} \varphi(\alpha_1) = 0, & \varphi(\alpha_2) = 0, & \dots, & \varphi(\alpha_k) = 0, \\ \varphi(\beta_1) = 1, & \varphi(\beta_2) = 0, & \dots, & \varphi(\beta_l) = 0. \end{array}$$

Wtedy mamy

$$\varphi(\operatorname{im} F) = \varphi\big(\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\big) = \operatorname{lin}\big(\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_k)\big) = 0,$$

a z drugiej strony $\varphi(\beta_1) \neq 0$, zatem $\varphi \neq 0$. Tak więc (ii) $\Leftarrow$ (i'), a to kończy dowód.

Ogólny dowód twierdzenia 2

Tym razem chcemy wykazać równoważność następujących dwóch warunków:

(i) F^* jest epimorfizmem (równoważnie: $\operatorname{im} F^*$ jest równe całemu V^*);

(ii) F jest monomorfizmem (równoważnie: $\ker F$ zawiera wyłącznie 0).

1. Znów rozpoczynamy od przeformułowania (i) z definicji F^*:

$$\varphi \in \operatorname{im} F^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{\psi \in W^*}\ \varphi = F^*(\psi) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{\psi \in W^*}\ \varphi = \psi \circ F.$$

Gwóźdź programu tkwi w tym, że dalej mamy (nieoczywistą) równoważność

$$(*) \qquad \exists_{\psi \in W^*}\ \varphi = \psi \circ F \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\ker F) = 0$$

Wykażemy ją w punktach **2–4** dowodu. Tymczasem zauważmy, że wyniknie stąd, że warunek (i) jest równoważny takiemu:

(i') Dla każdego funkcjonału $\varphi \in V^*$ zachodzi $\varphi(\ker F) = 0$.

I znów dla zakończenia dowodu pozostanie sprawdzić, że (ii) $\Leftrightarrow$ (i').

2. Implikacja $\Longrightarrow$ w równoważności (*) jest łatwa. Załóżmy, że $\varphi = \psi \circ F$ dla pewnego ψ. Niech α będzie dowolnym elementem $\ker F$. Wówczas mamy

$$\varphi(\alpha) = \psi\big(F(\alpha)\big) = \psi(0) = 0,$$

co pokazuje, że $\varphi(\ker F) = 0$.

3. Bierzemy się za implikację $\Longleftarrow$ w (*). Załóżmy, że $\varphi(\ker F) = 0$; chcemy znaleźć $\psi \in W^*$ takie, że

$$\varphi = \psi \circ F. \tag{**}$$

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą $\operatorname{im} F$, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — jej dopełnieniem do bazy całego W. (Tym razem może się zdarzyć, że $l = 0$, ale nie będzie to miało znaczenia).

Określamy $\psi : W \to K$ na zbudowanej powyżej bazie W następująco:

(***) $\quad \psi(\alpha_i) = \varphi(\gamma_i), \qquad$ gdzie γ_i jest dowolna taka, że $F(\gamma_i) = \alpha_i, \qquad$ dla $i = 1, \ldots, k,$

$$\psi(\beta_j) = 0 \qquad \text{dla } j = 1, \ldots, l.$$

4. Trzeba sprawdzić, że definicja z punktu **3** działa. Dokładniej:

- Jest jasne, że γ_i w (***) istnieje, ponieważ $\alpha_i \in \operatorname{im} F$.
- Nie jest jasne, że wartość $\psi(\alpha_i)$ w (***) jest określona jednoznacznie, ponieważ może istnieć wiele możliwych γ_i, które teoretycznie mogłyby dać różne wyniki $\varphi(\gamma_i)$.

  Uzasadnienie: Załóżmy, że $F(\gamma_i) = \alpha_i$ oraz $F(\gamma_i') = \alpha_i$. Wówczas mamy

  $$F(\gamma_i - \gamma_i') = F(\gamma_i) - F(\gamma_i') = \alpha_i - \alpha_i = 0,$$

  zatem $\gamma_i - \gamma_i' \in \ker F$. Ale założyliśmy, że $\varphi(\ker F) = 0$, a wobec tego

  $$\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i') = \varphi(\gamma_i - \gamma_i') \in \varphi(\ker F) = 0,$$

  co oznacza, że $\varphi(\gamma_i) = \varphi(\gamma_i')$, czyli wartość definiująca $\psi(\alpha_i)$ nie zależy od wyboru wektora γ_i, czyli definicja (***) jest dla każdego i poprawna.
- Gdy już zwalczyliśmy powyższy problem, to jest jasne, że ψ jest poprawnie określonym przekształceniem liniowym (a więc elementem W^*), ponieważ przekształcenia liniowe zawsze można zadać jednoznacznie podając ich wartości na wybranej bazie (wiedza z wykładu).
- Wypadałoby jeszcze wyjaśnić, czemu zachodzi (**).

  Uzasadnienie: Ponieważ po obu stronach (**) znajdują się przekształcenia liniowe, wystarczy sprawdzić zgodność ich wartości na pewnej bazie przestrzeni V, a ogólniej, na pewnym układzie rozpinającym V. Łatwo sprawdzić zgodność tych przekształceń dla:

  – wektorów γ_i wybranych w (***), co wynika wprost z (***);

– wektorów z $\ker F$, ponieważ jeśli $\delta \in \ker F$, to $\varphi(\delta) \in \varphi(\ker F) = 0$ oraz $\psi(F(\delta)) = 0$.

Pokażemy, że wektory tych dwóch rodzajów rozpinają całe V. Niech $\delta \in V$. Ponieważ $F(\delta) \in \operatorname{im} F$, mamy

$$F(\delta) = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = F(a_1\gamma_1 + \ldots + a_k\gamma_k) \qquad \text{dla pewnych } a_1, \ldots, a_k \in K.$$

Wówczas

$$F\big(\delta - (a_1\gamma_1 + \ldots + a_k\gamma_k)\big) = 0,$$

zatem $\delta - (a_1\gamma_1 + \ldots + a_k\gamma_k) \in \ker F$. Ale to oznacza, że δ jest sumą kombinacji wektorów γ_i oraz z czegoś z $\ker F$, a to chcieliśmy wykazać.

Tym samym wykazaliśmy (*), a więc równoważność (i) $\Leftrightarrow$ (i'). Pozostaje wykazać, że (ii) $\Leftrightarrow$ (i').

5. Jeśli zachodzi (ii), to $\ker F = 0$, a wówczas warunek $\varphi(\ker F) = 0$ jest spełniony przez dowolne $\varphi \in V^*$, czyli zachodzi (i'). Zatem (ii) $\Rightarrow$ (i').

6. Pozostało wykazać (ii) $\Leftarrow$ (i'). Znów rozumujemy przez sprzeczność. Załóżmy, że $\ker F \neq 0$; chcemy pokazać przykład $\varphi \in V^*$ takiego, że $\varphi(\ker F) \neq 0$.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą $\ker F$, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_l$ jej dopełnieniem do bazy całego V. Określamy $\varphi : V \to K$ na zbudowanej powyżej bazie V następująco:

$$\varphi(\alpha_1) = 1, \qquad \varphi(\alpha_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(\alpha_k) = 0,$$

$$\varphi(\beta_1) = 0, \qquad \varphi(\beta_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(\beta_l) = 0.$$

Ponieważ $\alpha_1 \in \ker F$ i $\varphi(\alpha_1) \neq 0$, niewątpliwie zachodzi $\varphi(\ker F) \neq 0$. Tak więc (ii) $\Leftarrow$ (i'), a to kończy dowód.