GAL, Kolokwium 1, 04.12.2008

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać:
imię, nazwisko i numer indeksu osoby zdającej (BARDZO CZYTELNIE),
nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \ \ Re(-iz^3 + i) > 0\}.$$

Dla jakich wartości $1 \leq k \leq 8$, $(-1+i)^k \in D$.

(2) Niech U będzie następującym układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + sx_2 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + tx_4 = -1. \end{cases}$$

(a) Rozwiązać układ równań U dla $s = 2$ i $t = 5$.

(b) Znaleźć wszystkie wartości parametów s i t dla których układ równań U jest sprzeczny.

(3) Niech $V = lin((1, 2, -1, 3), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, -3, 1), (1, 3, -3, 4+s)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wymiar przestrzeni V w zależności od parametru $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ wektory $w_1 = (1, 2, 1, 2)$, $w_2 = (-1, -1, 0, 1)$ można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$ wektorami należącymi do przestrzeni V, podać przykład takich wektorów $v_1, v_2 \in V$.

(c) znaleźć współrzędne wektora $(-5, -7, -2, -1)$ w znalezionej bazie w_1, w_2, v_1, v_2.

(4) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V.

(b) Dla każdego wektora $v \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ taki, że $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

(5) Niech U i W będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V (nad ciałem K) takimi, że

$$dim(U + W) = dim(V \cap W) + 1.$$

Udowodnić, że $U + W = U \cup W$.

GAL, Kolokwium 1, 04.12.2008

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać:
imię, nazwisko i numer indeksu osoby zdającej (BARDZO CZYTELNIE),
nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \ \ Im(iz^3 - 1) > 0\}.$$

Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 8$, $(1-i)^k \in D$.

(2) Niech U będzie następującym układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + tx_2 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Rozwiązać układ równań U dla $s = 3$ i $t = 1$.

(b) Znaleźć wszystkie wartości parametów s i t dla których układ równań U jest sprzeczny.

(3) Niech $V = lin((1,3,-1,2),(1,2,1,0),(-1,-1,-3,2),(2,5,0,s)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wymiar przestrzeni V w zalezno sci od parametru $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dla jakich warto sci parametru $s \in \mathbb{R}$ wektory $w_1 = (1,2,1,2)$, $w_2 = (1,1,0,-1)$ można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$ wektorami należącymi do V, podać przykład takich wektorów $v_1, v_2 \in V$.

(c) znaleźć współrzędne wektora $(1,4,3,8)$ w znalezionej bazie w_1, w_2, v_1, v_2.

(4) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V.

(b) Dla każdego wektora $v \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ taki, że $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

(5) Niech U i W będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V (nad ciałem K) takimi, że

$$dim(U + W) = dim(V \cap W) + 1.$$

Udowodnić, że $U + W = U \cup W$.