GAL potok 1, kolokwium nr 1, 24.11.2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1.
a) Znaleźć postaci trygonometryczne pierwiastków stopnia 4 z liczby -9.
b) Wielomian $x^8 + 18x^4 + 81$ przedstawić jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia 2.

2. Niech $V \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Niech $W = \mathrm{lin}((\mathrm{s}, 1, 1, -\mathrm{s} - 5), (4, 2, 2, \mathrm{t}), (-6, -3, -3, 21))$. Dla jakich $s, t \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $V = W$?

3. Niech $V = \mathrm{lin}((1, 1, 3, 2), (4, 5, 2, 5), (2, 3, -4, 1), (1, 2, -5, 5)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Dla jakich wartości $r \in \mathbf{R}$ istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$ spełniająca warunki: $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ oraz wektor $\beta = (1, 1, 3, 3)$ ma w tej bazie współrzędne 0, 1, r, 0 ? Dla każdego takiego r podać przykład takiej bazy.

4. Wykazać, że każdą k wymiarową podprzestrzeń $V \subset K^n$ można opisać układem $n - k$ równań liniowych.

5.
a) Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla jakich $m \in \mathbf{N}$ każde dwie m wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni V mają niezerową część wspólną? Odpowiedź uzasadnij.
b) Niech V będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykazać, że istnieje ciąg podprzestrzeni $V_i \subset V,\ i = 1, 2, ...$ taki, że dla każdego i zachodzi $\dim V_i = \infty$ oraz dla każdych $i \neq j$ zachodzi $V_i \cap V_j = \{0\}$.

GAL potok 1, kolokwium nr 1, 24.11.2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
• imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
• numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
• numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1.
a) Znaleźć postaci trygonometryczne pierwiastków stopnia 4 z liczby -4.
b) Wielomian $x^8 + 8x^4 + 16$ przedstawić jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia 2.

2. Niech $V \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Niech $W = \mathrm{lin}((\mathrm{s}, 1, 1, \mathrm{s}+3), (\mathrm{t}, -2, -2, 4), (-15, 3, 3, -6))$. Dla jakich $s, t \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $V = W$?

3. Niech $V = \mathrm{lin}((1, 3, 2, 1), (2, 5, 5, 4), (2, 7, 3, 0), (2, 6, 5, 8)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Dla jakich wartości $r \in \mathbf{R}$ istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$ spełniająca warunki: $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ oraz wektor $\beta = (1, 3, 2, 2)$ ma w tej bazie współrzędne 0, 1, 0, r ? Dla każdego takiego r podać przykład takiej bazy.

4. Wykazać, że każdą k wymiarową podprzestrzeń $V \subset K^n$ można opisać układem $n - k$ równań liniowych.

5.
a) Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla jakich $m \in \mathbf{N}$ każde dwie m wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni V mają niezerową część wspólną? Odpowiedź uzasadnij.
b) Niech V będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykazać, że istnieje ciąg podprzestrzeni $V_i \subset V$, $i = 1, 2, ...$ taki, że dla każdego i zachodzi $\dim V_i = \infty$ oraz dla każdych $i \neq j$ zachodzi $V_i \cap V_j = \{0\}$.