GAL 2012/13 — zadania z gwiazdką

2 października

1. Udowodnij *(bez korzystania z eliminacji Gaußa)*, że dowolny układ równań liniowych ma 0, 1 albo nieskończenie wiele rozwiązań.

2. Niech x, y, z, A, B, C będą dowolne rzeczywiste, byle by x, y, z były różne między sobą. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia nie większego niż 2, spełniający warunki

$$P(x) = A, \qquad P(y) = B, \qquad P(z) = C.$$

3. *(Uogólnienie poprzedniego)* Niech $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$ będą dowolne rzeczywiste, byle by $x_1, \dots, x_n$ były parami różne.
Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia co najwyżej n, spełniający warunki

$$P(x_1) = A_1, \dots, P(x_n) = A_n.$$

5 października

4. Udowodnij, że jeśli z macierzy A można uzyskać (poprzez operacje elementarne) macierze w postaci schodkowej zredukowanej A', A'', to $A' = A''$.
Równoważnie: jeśli z macierzy schodkowej zredukowanej B można uzyskać (poprzez op. el.) macierz schodkową zredukowaną B', to $B = B'$.
Wskazówka: Rozważ układy równań związane z tymi macierzami.

9 października

5. Niech

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1,(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{2,(n+1)} \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_{m,(n+1)} \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych z jednym parametrem t, w którym każdy współczynnik a_{ij} ma postać $A_{ij}t + B_{ij}$, gdzie A_{ij}, B_{ij} są liczbami rzeczywistymi (być może równymi zero).
Udowodnij, że liczba rozwiązań układu jest taka sama dla wszystkich, oprócz pewnych skończenie wielu, wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.

6. Jak zmieni się sytuacja, jeśli w zadaniu 5 dodamy założenie, że parametr występuje tylko w jednym miejscu w całym układzie?

7. Czy istnieje takie działanie $\oplus$ na $\mathbb{Q}$, żeby $\mathbb{Q}$ wraz z $\oplus$ jako dodawaniem oraz z działaniem

$$a \odot b = ab + a + b$$

jako mnożeniem (wraz z odpowiednimi elementami neutralnymi) było ciałem?

12 października

8 (względnie łatwe)**.** Znajdź ciało:
a) mające 9 elementów;
b) mające 25 elementów.
(Wskazówka: przyjrzyj się ciału $\mathbb{C}$)

9. Udowodnij, że jeśli K jest ciałem skończonym, to liczba jego elementów jest potęgą liczby pierwszej.
(Mamy też na odwrót: jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje ciało n-elementowe. Ale to jest trudniejsze.)

16 października

10. Oblicz *(przy pomocy liczb zespolonych)*:

(a)
$$\cos\alpha + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha),$$

(b)
$$\cos\alpha + 2\cos(2\alpha) + 3\cos(3\alpha) + \ldots + n\cos(n\alpha).$$

19 października

11. Dana jest liczba naturalna n. Podzbiór $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ nazwiemy *czerwonym*, jeśli liczba elementów A dzieli się przez 4, oraz *niebieskim*, jeśli jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Udowodnij, że:
a) Jeśli n dzieli się przez 8, to podzbiorów czerwonych jest więcej niż niebieskich.
b) Jeśli n dzieli się przez 4, ale nie przez 8, to jest odwrotnie.
(Wskazówka: użyj liczb zespolonych :)

12. Przy pomocy liczb zespolonych udowodnij twierdzenie Ptolemeusza:
Jeśli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to zachodzi

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

(w razie wątpliwości: punkty A, B, C, D leżą na okręgu właśnie w tej kolejności)

23 października

13. Znajdź sumę wszystkich zespolonych pierwiastków pierwotnych n-tego stopnia z jedynki. (Pierwiastek nazywamy *pierwotnym*, jeśli nie jest pierwiastkiem z jedynki stopnia mniejszego niż n; np. dla $n = 4$ są to i oraz $-i$).

26 października

14. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $W_1, W_2, \ldots, W_s$ będą jej podprzestrzeniami liniowymi takimi, że $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_s$.
a) Udowodnij, że jeśli $s = 2$, to $W_1 = V$ lub $W_2 = V$.
b) Udowodnij, że jeśli K jest nieskończone, to istnieje takie i, że $W_i = V$.
c) Znajdź takie s, K, V oraz W_i spełniające założenia zadania, że żadne W_i nie jest równe V.

13 listopada

15.
a) Niech K będzie ciałem zawierającym $\mathbb{C}$. Wówczas K jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$. Załóżmy, że jej wymiar jest skończony. Udowodnij, że wówczas $K = \mathbb{C}$.
b) Analogicznie, niech K będzie ciałem zawierającym $\mathbb{R}$, będącym skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Udowodnij, że w takim wypadku wymiar K nad $\mathbb{R}$ wynosi 1 lub 2.
Wskazówka: skorzystaj z zasadniczego twierdzenia algebry.

16. Udowodnij, że $\mathbb{R}$ nie ma skończonej bazy nad $\mathbb{Q}$.
(Na osobną gwiazdkę zasługuje podanie ***przykładu*** *nieskończonego układu niezależnego wraz z uzasadnieniem — ja nie umiem bez użycia głębokich twierdzeń z XIX w.)*

17. Udowodnij, że $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{R}$ nie mają bazy przeliczalnej.

8 stycznia

Uwaga: w poniższych zadaniach będę zapisywać wskazówki białym tekstem. Można je więc obejrzeć metodą kopiuj–wklej — ale wcześniej można też pobawić się bez nich.

18. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, $\varphi, \psi : V \to V$ będą liniowe oraz *przemienne*, tzn. $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Załóżmy też, że $\varphi - \psi$ jest monomorfmizmem. Udowodnij, że wówczas zachodzi

$$\ker(\varphi \circ \psi) = \ker \varphi \oplus \ker \psi.$$

(Wskazówka:)

Oznaczenie. Niech K będzie ciałem, V — przestrzenią liniową nad K, zaś $\varphi : V \to V$ przekształceniem liniowym. Jeśli

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

jest wielomianem o współczynnikach w K, to określamy przekształcenie liniowe $P(\varphi) : V \to V$ wzorem

$$P(\varphi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \cdot \varphi + a_2 \cdot \varphi \circ \varphi + \ldots + a_n \cdot \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n}$$

19. Udowodnij, że dla dowolnego $0 \neq P \in \mathbb{R}[x]$ istnieje $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $P(\varphi) = 0$.

20. Niech P będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach w ciele K, który ma komplet jednokrotnych pierwiastków $a_1, \ldots, a_n$, to znaczy

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

i niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K (niekoniecznie wymiaru n), zaś $\varphi : V \to V$ będzie liniowe i spełnia $P(\varphi) = 0$. Udowodnij, że wówczas istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna (tzn. poza przekątną zawiera same zera), zaś na przekątnej pojawiają się wyłącznie liczby $a_1, \ldots, a_n$ (dowolną liczbę razy).
Uwaga: Powyższe zadanie uogólnia równocześnie zadanie o rzucie, symetrii oraz złożeniu rzutu z symetrią!
(Wskazówka 1:)
(Wskazówka 2:)

21. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V. Określamy przekształcenie $\varphi : V \to V^*$, zadając je na bazie $\mathcal{A}$ wzorem:

$$\varphi(\alpha) = \alpha^* \qquad \text{dla } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Udowodnij, że φ jest monomorfizmem, ale nie jest izomorfizmem, jeśli tylko $\dim V = \infty$.

Uwaga: Jeśli $\dim V = \infty$*, to z powyższego zadania nie wynika wprawdzie jeszcze nieistnienie żadnego izomorfizmu pomiędzy V a V^* (czy rozumiesz, dlaczego?). Można wykazać, że rzeczywiście żaden taki izomorfizm nie istnieje. W ogólności jest to dość skomplikowane, dlatego w poniższym zadaniu uprościmy sobie życie.*

22. Udowodnij — dla wybranego przez siebie przykładu ciała K oraz nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad K — że V^* nie jest izomorficzne z V.
(Wskazówka: *)*

18 stycznia

23. Rozwiąż zadanie 5 z serii 10 zadań domowych w przypadku, gdy B ma więcej kolumn niż wierszy.