

Zadania domowe z GAL II — seria A
(termin: 20 VI — przed egzaminem)
(Autorem części zadań jest dr A. Bojanowska)

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Czy macierz A^{100} jest diagonalizowalna?

b) Znajdź przykład macierzy $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ takiej, że $B^5 = A$.

2. Znajdź ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego) bazę wektorów własnych dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadanego wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2).$$

3. W afinicznej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź układ równań opisujący płaszczyznę prostopadłą do $[0, 1, 0, 1] + \text{lin}((1, 1, 0, 3), (0, 2, 1, 1))$ i przechodzącą przez punkt $[1, 1, 0, 0]$.

4. Niech

$$\mathcal{A} : (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

oraz

$$M(\xi_a)_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa ξ_a jest iloczynem skalarnym?

b) Podaj wzór analityczny na ξ_1 .

5. Udowodnij, że diagonalizowalne przekształcenie ortogonalne jest symetrią prostopadłą.

6. W afinicznej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź równanie opisujące obraz płaszczyzny $M : \{x_1 + x_3 = 2$ przy symetrii prostopadłej względem prostej $l = [1, 0, 1] + \text{lin}((1, 1, 1))$.

Wskazówka: Wystarczy dwie linijki rachunków.

7. a) Podaj przykład iloczynu skalarnego w przestrzeni \mathbb{R}^2 , dla którego

$$\angle((1, 0), (0, 1)) = 30^\circ.$$

b) Czy istnieje iloczyn skalarny spełniający warunek z punktu a), dla którego

$$\angle((1, 0), (0, -1)) = 120^\circ ?$$

8. Sklasyfikuj następującą izometrię przestrzeni \mathbb{R}^3 (ze standardowym iloczynem skalarnym):

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_3, x_1, x_2).$$

Określ, czy jest to symetria, obrót, czy też ich złożenie. Znajdź bazę ortogonalną, w której macierz φ ma postać

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array} \right]$$

9. W zależności od wartości $t \in \mathbb{R}$ określ typ afiniczny hiperpowierzchni $X_t \subseteq \mathbb{R}^3$ zadanej równaniem

$$x_2^2 + 2x_2x_3 + 2tx_2 + 2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1 - 1 = 0$$

oraz wyznacz jej środki symetrii.

Wskazówka: Rachunki mogą się uprościć, jeśli najpierw rozważysz $t = 0$.

10. Niech hiperpowierzchnia $X_t \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) będzie opisana równaniem postaci

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n c_i x_i + d = 0,$$

gdzie dokładnie jeden ze współczynników c_i jest równy parametrowi t , zaś wszystkie pozostałe współczynniki a_i , b_{ij} , c_i , d są stałymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że poprzez zmienianie wartości t można uzyskać co najwyżej trzy różne typy afiniczne powierzchni X_t .