Zadania domowe z GAL II — seria 10 (termin: 20 VI)

Wskazówka ogólna. Te zadania nie są rachunkowe (gdzieniegdzie wystarczą wręcz *śladowe* rachunki). Najlepiej spróbuj rozwiązać każde w pięciu linijkach tekstu.

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Czy macierze $A + A^T$ i $A + A$ są podobne?

2. W trójkącie ABC wybrano wierzchołki D, E, F odpowiednio na bokach BC, CA, AD w taki sposób, że

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = \frac{\pi^2}{129}.$$

Udowodnij, że wszystkie środkowe trójkątów ABC oraz DEF przecinają się w jednym punkcie.
Możesz korzystać ze szkolnej wiedzy na temat geometrii trójkąta.
(Wskazówka: skorzystaj z przekształceń afinicznych. Być może pomoże Ci rozważenie najpierw przypadku, gdy ABC jest równoboczny.)

3. W $\mathbb{R}^3$ dane są liniowo zależne wektory α_1, α_2, α_3 o długości 1 i takie, że kąt między każdymi dwoma różnymi z nich wynosi $\frac{2\pi}{3}$. Niech π_α oznacza rzut prostopadły na $\mathrm{lin}(\alpha)$, zaś π_M — rzut prostopadły na $M = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Wiedząc, że w takiej sytuacji przekształcenie liniowe $\pi_{\alpha_1} + \pi_{\alpha_2} + \pi_{\alpha_3}$ musi być równe $a \cdot \pi_M$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, znajdź a.
Bonus dla ambitnych: Udowodnij, że liniowa zależność α_1, α_2, α_3 wynika z pozostałych założeń.

Definicja. Niech (P, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że ciąg elementów $p_n \in P$ *zbiega* do elementu $p \in P$, jeśli ciąg liczb $\varrho(p_n, p)$ zbiega do 0.

4. Niech $< \cdot, \cdot >$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ oraz α będą wektorami w $\mathbb{R}^k$. Udowodnij, że zbieżność $\alpha_n \to \alpha$ zachodzi w metryce ϱ wyznaczonej przez $< \cdot, \cdot >$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi ona w metryce ϱ_{st} wyznaczonej przez standardowy iloczyn skalarny $< \cdot, \cdot >_{\mathrm{st}}$. *(Jest to szczególny przypadek twierdzenia o tym, że wszystkie normy w $\mathbb{R}^k$ są równoważne, którego dowód na początku drugiego roku ogląda się z nieznanych przyczyn około czterokrotnie. Ale warto, bo ciekawy. Za to w powyższej wersji jest to nietrudne zadanie z naszego przedmiotu)*

5. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz

$$X_1 = \left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + 3x_2^2 = 5, \right\}$$
$$X_2 = \left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, ax_1^2 + bx_2^2 = -5\right\}.$$

Dla jakich wartości a, b istnieje afiniczna <u>izometria</u> przeprowadzająca X_1 na X_2?