Rozwiązania

Seria 8

4 czerwca 2013

Zadanie 1
Niech α, β, γ *będą niezerowymi wektorami w przestrzeni afinicznej* E^2 *ze standardową orientacją. Udowodnij, że*

$$\cos\angle(\alpha,\gamma) = \cos\angle(\alpha,\beta)\cos\angle(\beta,\gamma) - \sin\angle(\alpha,\beta)\sin\angle(\beta,\gamma).$$

Rozwiązanie:
$\cos\angle(\alpha,\beta)\cos\angle(\beta,\gamma) - \sin\angle(\alpha,\beta)\sin\angle(\beta,\gamma) =$

$$= \frac{<\alpha,\beta>}{||\alpha||\cdot||\beta||} \cdot \frac{<\beta,\gamma>}{||\beta||\cdot||\gamma||} - \frac{1}{||\alpha||\cdot||\beta||} \det \begin{bmatrix} -\alpha- \\ -\beta- \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{||\beta||\cdot||\gamma||} \det \begin{bmatrix} -\beta- \\ -\gamma- \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{||\alpha||\cdot||\gamma||\cdot||\beta||^2} \left(\alpha\beta^T\beta\gamma^T - \det \begin{bmatrix} -\alpha- \\ -\beta- \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} | & | \\ \beta^T & \gamma^T \\ | & | \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{||\alpha||\cdot||\gamma||\cdot||\beta||^2} \left(\alpha\beta^T\beta\gamma^T - \begin{vmatrix} \alpha\beta^T & \alpha\gamma^T \\ \beta\beta^T & \beta\gamma^T \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{||\alpha||\cdot||\gamma||\cdot||\beta||^2} \left(\alpha\beta^T\beta\gamma^T - \alpha\beta^T\beta\gamma^T + \beta\beta^T\alpha\gamma^T \right) =$$

$$= \frac{1}{||\alpha||\cdot||\gamma||\cdot||\beta||^2} \cdot ||\beta||^2 < \alpha,\gamma > \; = \; \cos\angle(\alpha,\gamma).$$

Zadanie 2
Niech

$$\varphi((x_1,x_2,x_3)) = -4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Znajdź postać diagonalną φ *dwoma sposobami:*

- *przy pomocy twierdzenia o przekształceniach samosprzężonych,*
- *przy pomocy uzupełniania do pełnych kwadratów.*

Rozwiązanie:

- Znajdziemy najpierw postać diagonalną φ przy pomocy uzupełniania do pełnych kwadratów:
  $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = -4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 =$
  (podstawiamy $x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$)
  $= -4(y_1^2 - y_2^2) + 4y_1y_3 - 4y_2y_3 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 = 4y_2^2 - 4y_1^2 + 8y_1y_3 =$
  $= 4y_2^2 - 4(y_1 - y_3)^2 + 4y_3^2 =$
  $(y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1),\ y_3 = x_3)$
  $= (x_2 - x_1)^2 - (x_2 + x_1 - 2x_3)^2 + 4x_3^2$

- Szukamy teraz postaci diagonalnej φ przy pomocy twierdzenia o przekształceniach samosprzężonych. Niech ψ będzie symetryczną formą dwuliniową odpowiadającą formie kwadratowej φ. Wówczas

  $$A := M(\varphi, \mathrm{st}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy A:

  $$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 8 - 8 + 4\lambda + 4\lambda + 4\lambda =$$

  $$= -\lambda^3 + 12\lambda - 16 = -(\lambda + 4)(\lambda - 2)^2.$$

  Wartości własne A to $2, 2, -4$, zatem istnieje baza, w której φ ma postać

  $$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2.$$

Zadanie 3
Niech nad ciałem $K = \mathbb{F}_2$ forma kwadratowa q będzie określona wzorem

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_3.$$

Udowodnij, że nie istnieje taka symetryczna forma dwuliniowa φ, że $q(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha)$ dla każdego α.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że taka forma dwuliniowa istnieje. Wówczas jej macierz w bazie standardowej musi być postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

bowiem macierz musi być symetryczna (bo φ symetryczna) i tylko współczynniki przy x_1x_3 i x_3x_1 mogą być niezerowe. Wynika stąd, że

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) = ax_1x_3 + ax_3x_1 = ax_1x_3 + ax_1x_3 = (a+a)x_1x_3 = 0,$$

ponieważ w ciele $\mathbb{F}_2$ mamy $0+0=0=1+1$. Jednakże z założenia

$$\varphi((1,0,1),(1,0,1)) = q((1,0,1)) = 1\cdot 1 = 1 \neq 0,$$

zatem taka symetryczna forma dwuliniowa nie istnieje.

Zadanie 4
Zbadaj dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ formy kwadratowe określone wzorami:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + rx_3^2$$

są równoważne.

Rozwiązanie
Znajdziemy postaci diagonalne φ i ϕ przy pomocy uzupełniania do pełnych kwadratów.

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_3 + x_2 + 2x_1)^2 + (2x_2)^2 - x_1^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$
$$\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + rx_3^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + (r-1)x_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + \operatorname{sign}(r-1)z_3^2.$$

Wynika stąd, że formy φ i ϕ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{sign}(r-1) = -1$, czyli gdy $r < 1$.

Zadanie 5
Niech $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ będzie określone wzorem:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2),$$

zaś $w(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 1 \ \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$.
a) Opisz jakim wielomianem jest opisana funkcja wielomianowa $w \circ f$.
b) Znajdź taki wielomian $v \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$, by $[v \circ f](x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2$.

Rozwiązanie:

$$w \circ f(x_1,x_2,x_3) = w(x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2) =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2(x_1 + 2x_2 + x_3) + 2(2x_1 + 5x_2 + 2x_3)^2 + 4(x_1 + 2x_2)^2 + 1 =$$

$$= x_1^2(1+8+4) + x_2^2(4+50+16) + x_3^2(1+8) + x_1x_2(4+40+16) + x_1x_3(2+16)+$$
$$+x_2x_3(4+40) + 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1 =$$
$$= 13x_1^2 + 70x_2^2 + 9x_3^2 + 60x_1x_2 + 18x_1x_3 + 44x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1.$$

Znajdziemy teraz taki wielomian $v \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, by $[v \circ f](x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2$.

Oznaczmy $M = M(f)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Łatwo zauważyć, że v powinien być stopnia równego 2, czyli

$$v(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + c, \text{ gdzie } A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}.$$

Wiemy, że $[v \circ f](x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2$, ponadto f jest przekształceniem liniowym, zatem $BM \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + c$ jest sumą składników liniowych i stałej, skąd wynika $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $c = 0$ (bo $v \circ f$ jest sumą składników stopnia 2). Możemy przyjąć, że A jest macierzą symetryczną. Z założenia

$$[v \circ f](x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Z drugiej strony ustaliliśmy, że

$$[v \circ f](x_1, x_2, x_3) = \left(M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^T A \left(M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} M^T A M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że

$$MAM = M^T A M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

bo założyliśmy, że A jest symetryczna. Zatem

$$A = M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1}.$$

Łatwo policzyć $M^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i po wymnożeniu mamy $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, czyli

$$v(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3.$$