# Rozwiązania

Seria 7

14 maja 2013

**Zadanie 1**
*Opisz wszystkie iloczyny skalarne na* $\mathbb{R}^2$ *spełniające* $\varphi((x,y);(x,y)) = 5x^2 + 2xy + y^2$.

**Rozwiązanie:**
Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą iloczynu skalarnego $\varphi$ w bazie standardowej. Wówczas $A$ musi być symetryczna (czyli $b = c$) i dodatnio określona, więc z kryterium Sylvestera musi zachodzić

$$a > 0 \ \wedge \ ad - b^2 > 0. \tag{$*$}$$

Ponadto

$$\varphi((x,y);(x,y)) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by & bx + dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2.$$

Porównując powyższą zależność ze wzorem z treści zadania mamy

$$a = 5 \ \wedge \ b = 1 \wedge \ d = 1.$$

Oczywiście te liczby spełniają $(*)$, zatem możemy podać wzór na $\varphi$:

$$\varphi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 5x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2.$$

**Zadanie 2**

*Niech* $\alpha$ *i* $\beta$ *będą wektorami przestrzeni euklidesowej* $V$ *spełniającymi warunki:*
$||\alpha+\beta|| = 5,\ ||\alpha-\beta|| = 1,\ \cos(\angle\alpha\beta) = \frac{1}{2}$.
*a) Oblicz* $||\alpha|| + ||\beta||$.
*b) Oblicz* $||\alpha|| \cdot ||\beta||$.

**Rozwiązanie:**
Zauważmy, że

$$\begin{array}{rl} - & \left\{\begin{array}{rclcl} 25 & = & ||\alpha+\beta||^2 & = & ||\alpha||^2 + ||\beta||^2 + 2 < \alpha,\beta > \\ 1 & = & ||\alpha-\beta||^2 & = & ||\alpha||^2 + ||\beta||^2 - 2 < \alpha,\beta > \end{array}\right. \\ \hline & \begin{array}{rcl} 24 & = & 4 < \alpha,\beta > \\ 6 & = & < \alpha,\beta > . \end{array} \end{array}$$

Z drugiej strony

$$< \alpha,\beta > = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos(\angle\alpha\beta),$$

skąd mamy

$$||\alpha|| \cdot ||\beta|| = \frac{< \alpha,\beta >}{\cos(\angle\alpha\beta)} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12.$$

Oczywiście

$$(||\alpha|| + ||\beta||)^2 = ||\alpha||^2 + ||\beta||^2 + 2||\alpha|| \cdot ||\beta|| = ||\alpha+\beta||^2 - 2 < \alpha,\beta > + 2||\alpha|| \cdot ||\beta|| =$$

$$= 25 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 37,$$

więc

$$||\alpha|| + ||\beta|| = \sqrt{37}.$$

**Zadanie 3**

*Niech* $p = [1,1,2],\ q = [0,-1,3],\ l = [0,0,1] + \mathrm{lin}\,([1,1,-1])$. *Znajdź* $r \in l$, *dla którego pole trójkąta* $\mathrm{af}(p,q,r)$ *jest najmniejsze.*

**Rozwiązanie:**
Oczywiście punkt $r$ musi być postaci $r = [t, t, 1-t]$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że trójkąt o wierzchołkach $p, q, r$ jest rozpięty przez wektory

$$\alpha := \overrightarrow{pq} = [-1,-2,1] \quad \text{oraz} \quad \beta := \overrightarrow{pr} = [t-1, t-1, -t-1].$$

Pole trójkąta $\mathrm{af}(p,q,r)$ to $\frac{1}{2}$ pierwiastka z wyznacznika Grama wektorów $\alpha, \beta$, więc

$$S(\mathrm{af}(p,q,r)) = \frac{1}{2}\left(\det\begin{bmatrix} < \alpha,\alpha > & < \alpha,\beta > \\ < \beta,\alpha > & < \beta,\beta > \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\det\begin{bmatrix} 6 & 2-4t \\ 2-4t & 3t^2-2t+3 \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6(3t^2 - 2t + 3) - (2 - 4t)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2 + 4t + 14}.$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem jest trójmnianem kwadratowym, który najmniejszą wartość przyjmuje dla $t = -1$, zatem $r = [-1, -1, 2]$.

**Zadanie 4**

*Niech* $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

*a) Znajdź bazę ortonormalną przestrzeni* $V$.

*b) Znajdź wzór na przekształcenie* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *będące rzutem prostopadłym na* $V$ *i macierz* $f$ *w bazie standardowej.*

**Rozwiązanie:**

Nietrudno zauważyć, że $\alpha_1 = [1, 1, 0] \in V$. Znajdziemy teraz wektor $\alpha_2 = [a, b, c]$ prostopadły do $\alpha_1$ i należący do $V$. Jest on rozwiązaniem układu

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & a - b + c \\ 0 & = & a + b \end{array} \right. .$$

Przyjmijmy $\alpha_2 = [1, -1, -2]$. Wystarczy jeszcze unormować otrzymaną bazę:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{||\alpha_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0], \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{||\alpha_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -1, -2].$$

Wyznaczymy teraz wzór na $f$, czyli rzut prostopadły na $V$[1]:

$$f([x, y, z]) =< [x, y, z], \beta_1 > \beta_1 + < [x, y, z], \beta_2 > \beta_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y)[1, 1, 0] + \frac{1}{6}(x - y - 2z)[1, -1, -2] =$$

$$= \frac{1}{6}[3x + 3y + x - y - 2z, 3x + 3y - x + y + 2z, -2x + 2y + 4z] =$$

$$= \frac{1}{6}[4x + 2y - 2z, 2x + 4y + 2z, -2x + 2y + 4z] =$$

$$= \frac{1}{3}[2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z],$$

a stąd widać, że

$$M(f)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1] korzystamy tu z ortonormalności bazy $\{\beta_1, \beta_2\}$ przestrzeni $V$.

**Zadanie 5**
*a) Niech $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oznacza wyznacznik Grama dla wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ i standardowego iloczynu skalarnego. Udowodnij, że dla dowolnych $i \neq j$ oraz $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + a \cdot \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_k) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.*
*b) Niech $A$, $B$, $C$, $D$ będą czterema punktami w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że objętość czworościanu $ABCD$ równa się jednej trzeciej pola trójkąta $ABC$ pomnożonej przez odległość punktu $D$ od płaszczyzny $\mathrm{af}(A, B, C)$.*

**Rozwiązanie:**
W dowodzie skorzystamy z tego, że dodanie wiersza (kolumny) przemnożonego przez $a$ do innego nie zmienia wyznacznika oraz z dwuliniowości iloczynu skalarnego. Mamy

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha_1,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_i> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_i,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_i> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_k,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_i> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_k> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha_1,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_i> + a <\alpha_1,\alpha_j> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_i,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_i> + a <\alpha_i,\alpha_j> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_k,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_i> + a <\alpha_k,\alpha_j> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_k> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha_1,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_i,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_k,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_k> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha_1,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_1,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_i,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_i,\alpha_k> \\ +a <\alpha_j,\alpha_1> & & +a <\alpha_j,\alpha_i + a\alpha_j> & & +a <\alpha_j,\alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_k,\alpha_1> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_i + a\alpha_j> & \ldots & <\alpha_k,\alpha_k> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha_1, \alpha_1> & \dots & <\alpha_1, \alpha_i + a\alpha_j> & \dots & <\alpha_1, \alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_i + a\alpha_j, \alpha_1> & \dots & <\alpha_i + a\alpha_j, \alpha_i + a\alpha_j> & \dots & <\alpha_i + a\alpha_j, \alpha_k> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_k, \alpha_1> & \dots & <\alpha_k, \alpha_i + a\alpha_j> & \dots & <\alpha_k, \alpha_k> \end{vmatrix} =$$

$$= G(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + a \cdot \alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_k),$$

co chcieliśmy udowodnić.

Oznaczmy $\overrightarrow{AD} = \alpha$, $\overrightarrow{AB} = \beta$, $\overrightarrow{AC} = \gamma$. Wówczas objętość czworościanu $ABCD$ to

$$V(ABCD) = \frac{1}{3!}\sqrt{G(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Niech $\tilde{\alpha}$ oznacza rzut wektora $\alpha$ na $\operatorname{lin}\{\beta, \gamma\}$. Na mocy podpunktu a) mamy równość

$$G(\alpha - \tilde{\alpha}, \beta, \gamma) = G(\alpha, \beta, \gamma),$$

bo $\tilde{\alpha}$ jest kombinacją liniową wektorów $\beta, \gamma$. Ponadto $(\alpha - \tilde{\alpha}) \perp \beta \wedge (\alpha - \tilde{\alpha}) \perp \gamma$. Wobec tego

$$G(\alpha - \tilde{\alpha}, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} <\alpha - \tilde{\alpha}, \alpha - \tilde{\alpha}> & <\alpha - \tilde{\alpha}, \beta> & <\alpha - \tilde{\alpha}, \gamma> \\ <\beta, \alpha - \tilde{\alpha}> & <\beta, \beta> & <\gamma, \beta> \\ <\gamma, \alpha - \tilde{\alpha}> & <\gamma, \beta> & <\gamma, \gamma> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} <\alpha - \tilde{\alpha}, \alpha - \tilde{\alpha}> & 0 & 0 \\ 0 & <\beta, \beta> & <\beta, \gamma> \\ 0 & <\gamma, \beta> & <\gamma, \gamma> \end{vmatrix} = <\alpha - \tilde{\alpha}, \alpha - \tilde{\alpha}> G(\beta, \gamma).$$

Zatem

$$V(ABCD) = \frac{1}{3!}\sqrt{<\alpha - \tilde{\alpha}, \alpha - \tilde{\alpha}> G(\beta, \gamma)} = \frac{1}{3}\sqrt{<\alpha - \tilde{\alpha}, \alpha - \tilde{\alpha}>} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{G(\beta, \gamma)} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{dist}(D, \operatorname{af}(A, B, C)) \cdot S(ABC),$$

co kończy dowód.