Rozwiązania

Seria 6

14 maja 2013

Zadanie 1

Niech $A(n) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & n \end{bmatrix}$. *Zbadaj kiedy zachodzi kongruencja* $A(n) \equiv A(m)$ *nad ciałem:*
i) $\mathbb{Q}$, *ii)* $\mathbb{R}$, *iii)* $\mathbb{C}$.

Rozwiązanie:
Oczywiście, gdy $n = m = 9$ mamy $A(n) \equiv A(m)$. Dalej zakładamy, że $n \neq 9 \neq m$, bowiem gdyby $m \neq n = 9$ mielibyśmy $\mathrm{r}(A(n)) = 1 \neq 2 = \mathrm{r}(A(m))$, a wiemy, że macierze kongruentne mają ten sam rząd. Analogicznie gdy $n \neq m = 9$.

i) Zakładamy $n, m \in \mathbb{Q}$. Znajdźmy bazę ortogonalną $\mathbb{Q}^2$. Weźmy $\alpha_1 = [1, 0] \in \mathbb{Q}^2$. Szukamy α_2:

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

więc możemy przyjąć $\alpha_2 = [-3, 1] \in \mathbb{Q}^2$. W bazie $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $A(n)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & n-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-9 \end{bmatrix}.$$

Stąd $A(n) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-9 \end{bmatrix} := B(n)$. Analogicznie $A(m) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m-9 \end{bmatrix} := B(m)$. Kongruencja jest relacją równoważności, czyli wystarczy sprawdzić czy $B(n) \equiv B(m)$, tzn. czy istnieje macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ (gdzie $q \neq 0$) spełniająca równość $A(m) = C^T A(n) C$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^2(n-9) \end{bmatrix}.$$

Zatem musi zachodzić $m - 9 = q^2(n-9) \iff \frac{m-9}{n-9} = q^2$ dla pewnego $q \in \mathbb{Q}$. Wynika stąd, że $A(n) \equiv A(m)$ nad $\mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{m-9}{n-9}$ jest kwadratem liczby wymiernej różnej od 0 ($m \neq 9 \neq n$) lub gdy $m = n = 9$.

ii) Przeprowadzając analogiczne rachunki jak wcześniej dostajemy, że wystarczy sprawdzić, czy $B(n) \equiv B(m)$ nad $\mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$B(n) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(n-9) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B(m) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(m-9) \end{bmatrix},$$

więc $B(n) \equiv B(m) \iff \operatorname{sgn}(n-9) = \operatorname{sgn}(m-9)$, czyli gdy $\frac{n-9}{m-9} > 0$ lub $n = m = 9$.

iii) Założyliśmy $m \neq 9 \neq n$, skąd wynika, że $\mathrm{r}(A(n)) = \mathrm{r}(A(m))$, co oznacza, że $A(n) \equiv A(m)$ nad $\mathbb{C}$. Zatem $A(n) \equiv A(m)$ nad $\mathbb{C} \iff m \neq 9 \neq n \vee m = n = 9$.

Zadanie 2

Niech $\{\mathbb{R}^3; \varphi; \mathbb{R}\}$ *będzie przestrzenią dwuliniową,* $M(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Znajdź bazę ortogonalną i półunormowaną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
b) Zbadaj, czy istnieją 2-wymiarowe podprzestrzenie $V \subset \mathbb{R}^3$ *takie, że:*
i) $\varphi_{V \times V} > 0$, *ii)* $\varphi_{V \times V} < 0$, *iii)* $\varphi_{V \times V} \equiv 0$,

Rozwiązanie:

a) Weźmy dowolny nieizotropowy wektor, np. $\alpha_1 = [1,1,0]$. Szukamy $\operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp$:

$$0 = \varphi(\alpha_1, [x,y,z]) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x + 2y - z,$$

czyli $\operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp = \operatorname{lin}\{[1,0,2],[0,1,2]\}$ (tutaj widać, że α_1 jest nieizotropowy).
Przyjmijmy $\alpha_2 = [0,1,2]$. Znajdziemy $\operatorname{lin}(\alpha_2)^\perp$:

$$0 = \varphi(\alpha_2, [x,y,z]) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x - 2y - z,$$

więc $\operatorname{lin}(\alpha_2)^\perp = \operatorname{lin}\{[1,1,0],[1,0,2]\}$. Wybierzmy teraz $\alpha_3 \in \operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp \cap \operatorname{lin}(\alpha_2)^\perp$. Łatwo zauważyć, że możemy wziąć $\alpha_3 = [1,0,2]$.
$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Obliczymy teraz $\varphi(\alpha_i, \alpha_i)$:

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_1) = 4, \quad \varphi(\alpha_2,\alpha_2) = -4, \quad \varphi(\alpha_3,\alpha_3) = 0.$$

Wynika stąd, że bazą półunormowaną $\mathbb{R}^3$ jest

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \text{ gdzie } \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1, \beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2, \beta_3 = \alpha_3.$$

Wówczas mamy $M(\varphi; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, czyli sygnatura macierzy $M(\varphi)$ to 0.

b) i) Przypuśćmy, że istnieje podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\varphi_{V\times V} > 0$. Wówczas istnieje baza półunormowana $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ podprzestrzeni V (nieosobliwej), którą możemy uzupełnić do bazy półunormowanej $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Wówczas $M(\varphi; \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$, gdzie $t \in \{1, -1, 0\}$. Wynika stąd, że sygnatura należy do zbioru $\{1, 2, 3\} \not\ni 0$, czyli taka podprzestrzeń V nie istnieje.

ii) Zakładając, że istnieje podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\varphi_{V\times V} < 0$, w analogiczny sposób możemy udowodnić, że istnieje baza $\mathcal{D}$ spełniająca warunek
$M(\varphi; \mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$, gdzie $t \in \{1, -1, 0\}$, zatem sygnatura należy do zbioru $\{-1, -2, -3\} \not\ni 0$, więc także w tym przypadku taka podprzestrzeń nie istnieje.

iii) Sprawdzimy, czy istnieją dwa prostopadłe wektory izotropowe. Szukamy wektorów izotropowych:

$$0 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x - z & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4xy - 2yz$$

Wynika stąd, że $y = 0 \ \vee \ 2x - z = 0$. Wektorem izotropowym jest np. $[1, 0, 0]$. $\mathrm{lin}([1, 0, 0])^\perp = \mathrm{lin}([1, 0, 0], [0, 0, 1])$, zatem prostopadłym do $[1, 0, 0]$ wektorem izotropowym jest $[1, 0, 2]$, zatem istnieje taka podprzestrzeń V, że $\varphi_{V\times V} \equiv 0$.

Zadanie 3
Niech $\varphi : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem określonym wzorem $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta^T$. Udowodnij, że $\mathbb{C}^4$ zawiera całkowicie zdegenerowaną podprzestrzeń wymiaru 2, ale nie zawiera większej.

Rozwiązanie:
Niech V będzie całkowicie zdegenerowaną podprzestrzenią $\mathbb{C}^n$ wymiaru k ($k \leqslant n$), a $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ jej bazą. Wówczas

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,k\}} \ \varphi(\alpha_i, \alpha_j) = 0. \tag{$*$}$$

Jest to także warunek wystarczający na to, by V była całkowicie zdegenerowana, bowiem dla $\beta_i = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\alpha_l$, gdzie $i = 1, 2$ mamy

$$\varphi(\beta_1, \beta_2) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{k} a_{1l}\alpha_l, \sum_{m=1}^{k} a_{2m}\alpha_m\right) = \sum_{l,m=1}^{k} a_{1l}a_{2m}\varphi(\alpha_l, \alpha_m) = 0.$$

Weźmy zatem $V = \mathrm{lin}\,\{[1, i, 0, 0], [0, 0, 1, i]\} \subset \mathbb{C}^4$. Bardzo łatwo sprawdzić, że wektory rozpinające V spełniają warunek $(*)$, więc V jest podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną wymiaru 2.

Oczywiście $\{\mathbb{C}^4, \varphi\}$ jest nieosobliwa, bo jej macierz w bazie standardowej to macierz jednostkowa. Przypuśćmy, że $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ jest bazą całkowicie zdegenerowanej podprzestrzeni wymiaru 3. Dobierzmy wektor γ_4 tak, by $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ było bazą $\mathbb{C}^4$. Wówczas macierz φ w tej bazie to

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varphi(\gamma_1, \gamma_4) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\gamma_2, \gamma_4) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\gamma_3, \gamma_4) \\ \varphi(\gamma_4, \gamma_1) & \varphi(\gamma_4, \gamma_2) & \varphi(\gamma_4, \gamma_3) & \varphi(\gamma_4, \gamma_4) \end{bmatrix},$$

ale rząd tej macierzy to co najwyżej 2 - sprzeczność.
Oczywiście $\{\mathbb{C}^4, \varphi\}$ nie zawiera podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej wymiaru 4.

Zadanie 4
Niech $H = \mathrm{af}([3,-2,2],[4,-2,3],[3,-1,1])$.
a) Znajdź obraz $l = [0,1,3] + \mathrm{lin}([4,-4,-2])$ *przy rzucie prostopadłym względem* H.
b) Niech $A = [1,1,4]$, $B = [2,1,3]$, $C = [0,3,3]$ *i niech* A', B', C' *będą obrazami odpowiednio* A, B, C *w symetrii prostopadłej względem* H. *Znajdź* $\angle A'B'C'$.

Rozwiązanie:

a) Opiszemy najpierw H układem równań:

$$H = [3,-2,2] + \mathrm{lin}\{[1,0,1],[0,1,-1]\} = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \quad x - y - z = 3\Big\}.$$

Oczywiście zbiór wektorów prostopadłych do $T(H)$ to $\mathrm{lin}\{[1,-1,-1]\}$ (jest to wektor współczynników równania opisującego $T(H)$). Zauważmy, że

$$l = \mathrm{af}\{[0,1,3],[4,-3,1]\} \quad \Longrightarrow \quad f(l) = \mathrm{af}\{f([0,1,3]), f([4,-3,1])\},$$

gdzie f to rzut prostopadły na H. Znajdziemy teraz obrazy punktów rozpinających l przy rzucie f. W tym celu znajdziemy przecięcie prostej o kierunku wektora $[1,-1,-1]$ i przechodzącej przez dany punkt z płaszczyzną H.

- $[0,1,3] + t[1,-1,-1] = [t, 1-t, 3-t] \in H \quad \Longleftrightarrow \quad t - 1 + t - 3 + t = 3$, więc $t = \frac{7}{3}$, czyli $f([0,1,3]) = \left[\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- $[4,-3,1] + s[1,-1,-1] = [4+s, -3-s, 1-s] \in H \quad \Longleftrightarrow \quad 4+s+3+s-1+s = 3$, zatem $s = -1$, skąd mamy $f([4,-3,1]) = [3,-2,2]$.

Wynika stąd, że

$$f(l) = \mathrm{af}\left\{\left[\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right], [3,-2,2]\right\} = [3,-2,2] + \mathrm{lin}\left\{\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right]\right\} =$$

$$= [3,-2,2] + \mathrm{lin}\{[1,-1,2]\}.$$

b) Nietrudno zauważyć, że $\angle A'B'C' = \angle ABC$, gdyż symetria prostopadła jest izometrią (więc zachowuje miary kątów). Mamy zatem

$$\cos(\angle ABC) = \frac{< \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} >}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||} = \frac{< [-1,0,1], [-2,2,0] >}{||[-1,0,1]|| \cdot ||[-2,2,0]||} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem $\angle A'B'C' = \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 5

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni dwuliniowej V.
Wykaż, że $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(W \cap V^{\perp})$.

Rozwiązanie:

W dowodzie skorzystamy z tego, że $V = W + W^{\perp}$. Stąd mamy

$$\dim V = \dim(W + W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} - \dim(W \cap W^{\perp}).$$

Pozostaje wykazać, że

$$W \cap V^{\perp} = W \cap W^{\perp}. \qquad (**)$$

Weźmy $\alpha \in W \cap V^{\perp}$. Wynika stąd, że $\forall_{\beta \in V}\ \varphi(\alpha, \beta) = 0$, więc $\forall_{\gamma \in W}\ \varphi(\alpha, \gamma) = 0$, czyli $\alpha \in W^{\perp}$ oraz z założenia $\alpha \in W$, więc $\alpha \in W \cap W^{\perp}$, co wobec dowolności wektora α dowodzi inkluzji $W \cap V^{\perp} \subseteq W \cap W^{\perp}$.

Weźmy teraz $\beta \in W \cap W^{\perp}$. Niech $\gamma \in V$ będzie dowolnym wektorem. Możemy go przedstawić w postaci $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, gdzie $\gamma_1 \in W,\ \gamma_2 \in W^{\perp}$. Zauważmy, że

$$\varphi(\beta, \gamma) \ = \ \varphi(\beta, \gamma_1) + \varphi(\beta, \gamma_2) = 0,$$

bowiem $\beta \in W^{\perp} \wedge \gamma_1 \in W \implies \varphi(\beta, \gamma_1) = 0$, analogicznie $\varphi(\beta, \gamma_2) = 0$. Stąd $\beta \in V^{\perp}$ oraz z założenia $\beta \in W$, co wobec dowolności β daje inkluzję w drugą stronę, a to dowodzi równości $(**)$. Zatem

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp} - \dim(W \cap V^{\perp}),$$

co jest równoważne tezie.