Rozwiązania

Seria 5

6 maja 2013

Zadanie 1
Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem* $f(x, y, z) = (2x + y + 1, 2y + z + 2, 3)$. *Znajdź bazy punktowe przestrzeni* $V_1 = f(E)$ *i* $V_2 = f^{-1}(E)$*, gdzie* $E :\ 3x - 5y + z = 2$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $E = (0, 0, 2) + \operatorname{lin}\{(1, 0, -3), (0, 1, 5)\} = \operatorname{af}\{(0, 0, 2), (1, 0, -1), (0, 1, 7)\}$. Wynika stąd, że

$$V_1 = f(E) = \operatorname{af}\{f(0, 0, 2), f(1, 0, -1), f(0, 1, 7)\} = \operatorname{af}\{(1, 4, 3), (3, 1, 3), (2, 11, 3)\}.$$

Jest to baza punktowa, bowiem $T(V_1) = \operatorname{lin}\{(2, -3, 0), (1, 7, 0)\}$, a to są wektory liniowo niezależne. Znajdziemy teraz bazę przestrzeni V_2:

$$V_2 = f^{-1}(E) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (2x + y + 1, 2y + z + 2, 3) \in E\Big\} =$$

$$= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 3(2x + y + 1) - 5(2y + z + 2) + 3 = 2\Big\} =$$

$$= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 6x - 7y - 5z = 6\Big\} = (1, 0, 0) + \operatorname{lin}\{(7, 6, 0), (5, 0, 6)\} =$$

$$= \operatorname{af}\{(1, 0, 0), (8, 6, 0), (6, 0, 6)\}.$$

Zadanie 2
Znajdź bazę ortogonalną dla formy dwuliniowej φ o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Jako pierwszy wektor bazy ortogonalnej weźmy dowolny wektor nieizotropowy, przypuśćmy, że $\alpha_1 = [0,1,0,0]$. Niech M_i oznacza zbiór wektorów ortogonalnych do α_i. Szukamy M_1:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = a + 2b + 3d,$$

więc $M_1 = \operatorname{lin}\{[3,0,0,-1],[2,-1,0,0],[0,0,1,0]\}$. Weźmy $\alpha_2 = [0,0,1,0]$. Analogicznie szukamy M_2:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = -a - 2c - d,$$

czyli $M_2 = \operatorname{lin}\{[2,0,-1,0],[1,0,0,-1],[0,1,0,0]\}$ (wynika stąd, że $\alpha_2 \notin M_2$, czyli nie jest izotropowy). Wybierzmy $\alpha_3 \in M_1 \cap M_2$, np. $\alpha_3 = [1,1,0,-1]$. Znajdziemy M_3:

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0,$$

zatem $M_3 = \mathbb{R}^4$. Stąd musimy wybrać $\alpha_4 \in (M_1 \cap M_2) \backslash \operatorname{lin}\{\alpha_3\}$, np. $\alpha_4 = [3,0,-1,-1]$. Bazą ortogonalną dla formy dwuliniowej φ jest na przykład:

$$\mathcal{A} = \{[0,1,0,0],[0,0,1,0],[1,1,0,-1],[3,0,-1,-1]\}.$$

Zadanie 3

Niech $M = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ *będzie macierzą przekształcenia afinicznego* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
Opisz wszystkie podprzestrzenie afiniczne $H \subset \mathbb{R}^2$ *spełniające warunek* $f(H) = H$.

Rozwiązanie:
Z warunku $f(H) = H$ wynika $T(f(H)) = T(H)$, czyli $f'(T(H)) = T(H)$. Znajdziemy zatem podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia f'. W tym celu szukamy wartości własnych f':

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Wartości własne to 2 i -1. Wyznaczymy teraz wektory własne:

- $\lambda_1 = 2 :\quad \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - 2I\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = [2, 1],$
- $\lambda_2 = -1 :\quad \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + I\right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = [1, 2].$

f' ma dwie różne wartości własne, więc jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są:

$$\mathbf{0}, \quad \operatorname{lin}\{[2,1]\}, \quad \operatorname{lin}\{[1,2]\}, \quad \mathbb{R}^2.$$

Sprawdzimy teraz, czy przekształcenie afiniczne f ma punkt stały. Musi zachodzić

$$(x, y) = f(x, y) = (3x - 2y + 1, 2x - 2y + 1) \iff 2x - 2y + 1 = 2x - 3y + 1 = 0,$$

skąd $x = -\frac{1}{2},\ y = 0$.
Zatem podprzestrzenie afiniczne $H \subset \mathbb{R}^2$ spełniające warunek $f(H) = H$ to:

$$H_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad H_2 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] + \operatorname{lin}\{[2,1]\}, \quad H_3 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] + \operatorname{lin}\{[1,2]\}, \quad H_4 = \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 4

Znajdź macierz przekształcenia afinicznego $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, *które jest rzutem na płaszczyznę* $\operatorname{af}\{(0,2,0),(-1,1,-1),(2,2,1)\}$ *i które prostą* $(0,1,0)+\operatorname{lin}\{(3,0,1)\}$ *przeprowadza na prostą opisaną układem* $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Rozwiązanie:

Niech k będzie prostą opisaną powyższymi równaniami. Rozwiązaniem tego układu jest np. $(3,1,1)$, a rozwiązanie układu jednorodnego odpowiadającemu powyższemu to $\operatorname{lin}\{(3,1,2)\}$, zatem

$$k=(3,1,1)+\operatorname{lin}\{(3,1,2)\}.$$

Mamy także

$$l:=(0,1,0)+\operatorname{lin}\{(3,0,1)\}=(3,1,1)+\operatorname{lin}\{(3,0,1)\}.$$

Stąd $k\cap l=(3,1,1)$. Ponadto

$$H:=\operatorname{af}\{(0,2,0),(-1,1,-1),(2,2,1)\}=(0,2,0)+\operatorname{lin}\{(1,1,1),(2,0,1)\}.$$

Nietrudno zauważyć, że f' musi spełniać warunki[1]:

$$f'(1,1,1)=(1,1,1),\quad f'(2,0,1)=(2,0,1),\quad f'(3,0,1)=(3,1,2),$$

skąd mamy

$$f'(1,0,0)=(1,1,1),\quad f'(0,0,1)=(0,-2,-1),\quad f'(0,1,0)=(0,2,1),$$

zatem

$$f'(x,y,z)=(x,x+2y-2z,x+y-z).$$

Oczywiście musi zachodzić $f(3,1,1)=(3,1,1)$, więc

$$f(x,y,z)=f(3,1,1)+f'(x-3,y-1,z-1)=$$

$$=(3,1,1)+(x-3,x-3+2y-2-2z+2,x-3+y-1-z+1)=$$

$$=(x,x+2y-2z-2,x+y-z-2).$$

Możemy zatem podać macierz przekształcenia f:

$$M(f)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\1&2&-2&-2\\1&1&-1&-2\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right].$$

[1]Tutaj zakładamy, że $f'(3,0,1)=(3,1,2)$. Równie dobrze można by przyjąć $f'(3,0,1)=c\cdot(3,1,2)$, gdzie $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i wówczas otrzymalibyśmy inny wzór na f.

Zadanie 5

Udowodnij przy pomocy iloczynu skalarnego, że suma kwadratów długości przekątnych dowolnego równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego boków.

Rozwiązanie:

Weźmy dowolny równoległobok $ABCD$. Oznaczmy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = a$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = b$. Wówczas $\overrightarrow{AC} = a + b$, $\overrightarrow{BD} = b - a$ (a, b to wektory). Mamy zatem:

$$||AC||^2 + ||BD||^2 =< a + b, a + b > + < b - a, b - a >=$$

$$=< a, a > + < a, b > + < b, a > + < b, b > + < b, b > - < b, a > - < a, b > + < a, a >=$$

$$= 2 < a, a > +2 < b, b >= ||AB||^2 + ||BC||^2 + ||CD||^2 + ||DA||^2,$$

co kończy dowód.