Rozwiązania

Seria 4

9 kwietnia 2013

Zadanie 1
Znajdź układ równań opisujących podprzestrzeń afiniczną:

$$\mathrm{af}([1,1,0,1],[2,0,2,0],[-1,-1,5,4],[4,2,-3,-3]) \subset \mathbb{R}^4$$

Rozwiązanie:
Niech M będzie opisaną wyżej podprzestrzenią. Oczywiście:

$$M = [1,1,0,1] + \mathrm{lin}([1,-1,2,-1],[-2,-2,5,3],[3,1,-3,-4])$$

ale $[3,1,-3,-4] = [1,-1,2,-1] - [-2,-2,5,3]$, więc:

$$M = [1,1,0,1] + \mathrm{lin}([1,-1,2,-1],[-2,-2,5,3])$$

Poniżej znajdziemy układ równań opisujący $T(M)$:

$$\left[\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & x_1 \\ -1 & -2 & x_2 \\ 2 & 5 & x_3 \\ -1 & 3 & x_4 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 + w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 + w_1 \end{array} \left[\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & -4 & x_1 + x_2 \\ 0 & 9 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 1 & x_1 + x_4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} w_1 \\ w_4 \\ w_2 + 4w_4 \\ w_3 - 9w_4 \end{array} \left[\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 5x_1 + x_2 + 4x_4 \\ 0 & 0 & -11x_1 + x_3 - 9x_4 \end{array}\right]$$

Zatem $T(M)$ jest opisane przez:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Wstawiając do powyższych równań współrzędne punktu $[1,1,0,1] \in M$ dostajemy kolejno 10 oraz 20, czyli M jest opisane układem:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 10 \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = 20 \end{cases}$$

Zadanie 2

Niech $l_1 = [0,5,1] + \mathrm{lin}([1,2,0])$ *i* $l_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}$ *będą prostymi w* $\mathbb{R}^3$*. Niech prosta* l *przechodzi przez punkt* $[4,4,1]$ *oraz przecina obie proste* l_1 *i* l_2*. Opisz* l *układem równań i znajdź punkty przecięcia.*

Rozwiązanie:

Zauważmy, że rozwiązaniem układu równań opisującego l_2 jest np. $[0,1,0]$, a rozwiązanie układu jednorodnego odpowiadającemu powyższemu to $\mathrm{lin}([3,0,1])$ (innych rozwiązań nie ma, bo wymiar przestrzeni rozwiązań to 1). Zatem:

$$l_2 = [0,1,0] + \mathrm{lin}([3,0,1] = \{[3s,1,s] : \quad s \in \mathbb{R}\}$$

Niech:

$$H = \mathrm{af}([4,4,1], l_1) = \mathrm{af}([4,4,1],[0,5,1],[1,7,1]) = [0,5,1] + \mathrm{lin}([4,-1,0],[1,2,0]) =$$

$$= \{[4p+q, 5-p+2q, 1] : \quad p,q \in \mathbb{R}\}$$

Przyrównując:

$$[3s,1,s] = [4p+q, 5-p+2q, 1]$$

dostajemy $s = 1$ (p i q nie potrzebujemy), zatem $H \cap l_2 = [3,1,1]$.
Weźmy zatem

$$l = \mathrm{af}([4,4,1],[3,1,1]) = [3,1,1] + \mathrm{lin}([1,3,0])$$

Wówczas $T(l)$ może być opisane równaniem:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

więc l jest opisane układem:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 8 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Oczywiście: $l_1 = \{[t, 5+2t, 1] : \quad t \in \mathbb{R}\}$. Wstawiając tak sparametryzowany punkt do powyższego układu mamy:

$$\begin{cases} 3t - 5 - 2t = 8 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

czyli $t = 13$. Stąd $l \cap l_1 = [13,31,1]$. Wcześniej pokazaliśmy, że $l \cap l_2 = [3,1,1]$.

Zadanie 3
Niech H_1 i H_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni H nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $p_1 \in H_1$ oraz $p_2 \in H_2$. Udowodnij, że:

$$\mathrm{af}(H_1 \cup H_2) = p_1 + T(H_1) + T(H_2) + \mathrm{lin}(p_2 - p_1)$$

Rozwiązanie:
Weźmy dowolny punkt $p \in \mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$. Wówczas:

$$p = (1-t)q_1 + tq_2, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},\ q_i \in H_i,\ i \in \{1,2\}$$

Oczywiście mamy:

$$q_i = p_i + \alpha_i, \quad \text{gdzie } \alpha_i \in T(H_i),\ i \in \{1,2\}$$

Wobec tego:

$$p = (1-t)p_1 + (1-t)\alpha_1 + tp_2 + t\alpha_2 = p_1 + t(p_2 - p_1) + (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$$

Zatem:

$$p \in p_1 + T(H_1) + T(H_2) + \mathrm{lin}(p_2 - p_1)$$

czyli:

$$\mathrm{af}(H_1 \cup H_2) \subseteq p_1 + T(H_1) + T(H_2) + \mathrm{lin}(p_2 - p_1)$$

Zauważmy, że $p_1 \in H_1 \subseteq \mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$, $\quad T(H_1), T(H_2) \subseteq T(\mathrm{af}(H_1 \cup H_2))$, a także $p_2 - p_1 \in T(\mathrm{af}(H_1 \cup H_2))$, więc $\mathrm{lin}(p_2 - p_1) \subseteq T(\mathrm{af}(H_1 \cup H_2))$, co dowodzi drugiej inkluzji i kończy dowód.

Zadanie 4
Niech $p = [2,3,4]$. $H = af([1,2,3],[0,1,5],[2,2,4],[4,3,3])$ i niech l będzie prostą opisaną równaniami: $x_1 - x_2 = x_2 + x_3 = -2$.
a) Wyznaczyć wzór rzutu na H wzdłuż l.
b) Znajdź punkt przecięcia H z prostą l' równoległą do l i przechodzącą przez p.

Rozwiązanie:
Sparametryzujemy najpierw podprzestrzeń H:

$$\begin{aligned}
H &= [0,1,5] + \mathrm{lin}([1,1,-2],[2,1,-1],[4,2,-2]) = \\
&= [0,1,5] + \mathrm{lin}([1,1,-2],[2,1,-1]-[1,1,-2], 2\cdot[2,1,-1]) = \\
&= [0,1,5] + \mathrm{lin}([1,1,-2],[1,0,1]) = \\
&= \{[0,1,5] + s[1,1,-2] + t[1,0,1] : \quad s,t \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{[s+t, 1+s, 5-2s+t] : \quad s,t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Weźmy dowolny punkt $q = [x,y,z] \in \mathbb{R}^3$. Układ równań opisujący prostą $\tilde{l}$ przechodzącą przez q i równoległą do l to:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x - y \\ x_2 + x_3 = y + z \end{cases}$$

Znajdziemy teraz przecięcie $H \cap \tilde{l}$ wstawiając współrzędne punktu z H do powyższego układu:

$$\begin{cases} s+t-1-s &= x-y \\ 1+s+5-2s+t &= y+z \end{cases}$$

$$\begin{cases} t &= x-y+1 \\ s &= 6+t-y-z \end{cases}$$

$$\begin{cases} t &= x-y+1 \\ s &= x-2y-z+7 \end{cases}$$

Stąd punktem przecięcia H oraz $\tilde{l}$ jest:

$$[x-2y-z+7+x-y+1, 1+x-2y-z+7, 5-2x+4y+2z-14+x-y+1] =$$

$$= [2x-3y-z+8, x-2y-z+8, -x+3y+2z-8]$$

Zatem wzór na π będące rzutem na H wzdłuż l to:

$$\pi([x,y,z]) = [2x-3y-z+8, x-2y-z+8, -x+3y+2z-8]$$

Zauważmy, że punkt przecięcia H z prostą l' równoległą do l i przechodzącą przez $p = [2,3,4]$ to po prostu $\pi(p)$, czyli:

$$H \cap l' = \pi(p) = [-1, 0, 7]$$

Zadanie 5

Niech $H_1 \subseteq H_2$ będą przestrzeniami afinicznymi skończonego wymiaru. Wykaż, że jeżeli $\dim H_1 \geqslant \dim H_2$ to $H_1 = H_2$.

Rozwiązanie:

Z zawierania $H_1 \subseteq H_2$ wynika, że $T(H_1) \subseteq T(H_2)$, a to oznacza, że:

$$\dim H_1 = \dim T(H_1) \leqslant \dim T(H_2) = \dim H_2$$

bo wymiar podprzestrzeni afinicznej jest taki sam, jak wymiar jej przestrzeni stycznej. Wiemy, że

$$\dim H_1 \geqslant \dim H_2$$

zatem:

$$\dim H_1 = \dim H_2$$

Niech $\mathcal{A} = \{p_0, \ldots, p_k\}$ będzie bazą punktową H_1. Z założenia $H_1 \subseteq H_2$, więc $\mathcal{A}$ jest bazą punktową H_2, bo jest afinicznie niezależnym układem $\dim H_2 + 1 = k+1$ punktów, czyli:

$$H_1 = H_2$$

co mieliśmy pokazać.