Rozwiązania

Seria 3

5 kwietnia 2013

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

a) Podaj postać Jordana macierzy A.

b) Wypisz wszystkie macierze Jordana, z dokładnością do permutacji klatek, które mają ten sam wielomian charakterystyczny i ten sam wielomian minimalny co A.

Rozwiązanie:

Znajdziemy najpierw wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$w_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= ((7-\lambda)(-1-\lambda)+16)((2-\lambda)(4-\lambda)+1) = (\lambda^2-6\lambda+9)(\lambda^2-6\lambda+9) = (\lambda-3)^4$$

Wartości własne macierzy A to: 3, 3, 3, 3.

$$\mathrm{r}(A-3I) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\mathrm{r}\left((A-3I)^2\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Będziemy zatem mieć dwie klatki wymiaru 2×2. Postać Jordana macierzy A to:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Podamy teraz wszystkie macierze Jordana z dokładnością do permutacji klatek, które mają ten sam wielomian charakterystyczny (czyli mają trójki na przekątnej) oraz ten sam wielomian minimalny (czyli największą klatkę Jordana wymiaru 2×2). Są to:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Niech $H = \mathrm{af}([1,1,2],[0,0,4],[0,1,3],[1,2,1]), \quad p = [-5,16,-7]$

Niech podprzestrzeń afiniczna $L \subseteq \mathbb{R}^3$ *będzie opisana układem równań:*

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 7y - 5z = 6 \end{cases}$$

a) Znajdź bazę punktową i wymiar H*.*
b) Czy $p \in H$*?*
c) Czy $L \subseteq H$*?*

Rozwiązanie:

Wiemy, że

$$H = [0,0,4] + \mathrm{lin}([1,1,-2],[0,1,-1],[1,2,-3])$$

Ponadto mamy $[1,2,-3] = [1,1,-2] + [0,1,-1]$, więc:

$$H = [0,0,4] + \mathrm{lin}([1,1,-2],[0,1,-1]) = \mathrm{af}([0,0,4],[1,1,2],[0,1,3])$$

Wynika stąd także, że $\dim H = 2$.

Sprawdzimy teraz, czy $p \in H$, mamy $p = [-5,16,-7] = [0,0,4] + [-5,16,-11]$.
Zauważmy, że:

$$[-5,16,-11] = -5[1,1,-2] + 21[0,1,-1] \in \mathrm{lin}([1,1,-2],[0,1,-1]) = T(H)$$

co oznacza, że $p \in H$.

Zbadamy, czy $L \subseteq H$. Schodkujemy macierz układu równań opisującego L:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & -5 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} w_1 \\ w_2/2 - w_1 \\ w_3 - 3w_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} w_1 + 3w_2 \\ -w_2 \\ w_3 - 2w_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest np. $[-1,2,1]$. Oczywiście

$$[-1,2,1] = [0,0,4] + [-1,2,-3]$$

ale

$$[-1,2,-3] = -[1,1,-2] + 3[0,1,-1] - [0,0,2] \notin \mathrm{lin}([1,1,-2],[0,1,-1]) = T(H)$$

zatem $L \nsubseteq H$.

Zadanie 3
Zbadaj dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierze A i $B-t$ są podobne.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:
Szukamy wielomianu charakterystycznego macierzy A:

$$w_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)((-1-\lambda)(1-\lambda)+1) = \lambda^3(\lambda-1)$$

Wartości własne A to 1, 0, 0, 0.

$$\mathrm{r}(A - 0I) = \mathrm{r}(A) = 3$$

Zatem postać Jordana macierzy A ma jedną $(4-3=1)$ klatkę odpowiadającą wartości własnej 0. Znajdziemy teraz wielomian charakterystyczny macierzy B_t:

$$w_{B_t}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & t & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)((-1-\lambda)(1-\lambda)+1) = \lambda^3(\lambda-1)$$

Wartości własne B to 1, 0, 0, 0.

$$\mathrm{r}(B_t - 0I) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 3 & \text{dla} \quad t \neq -1 \\ 2 & \text{dla} \quad t = -1 \end{cases}$$

Wynika stąd, że macierze A i B_t będą podobne wtedy i tylko wtedy gdy $t \neq -1$ (bo tylko wówczas będą miały takie same postaci Jordana).

Zadanie 4
Niech $A \in \mathbb{R}^5$ i $w_A(x) = -(x-1)^5$. Udowodnij, że macierze A^2 i A^5 są podobne.

Rozwiązanie:
Niech J bedzię macierzą w postaci Jordana podobną do A. Wystarczy pokazać, że macierze J^2 oraz J^5 są podobne (na mocy przechodniości podobieństwa i tego, że A^2 jest podobna do J^2, a A^5 do J^5).
Z treści zadania mamy:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } \varepsilon_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,4$$

Skorzystamy z bardzo prostego do wykazania (np. indukcyjnie) faktu:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & & & & * \\ & 0 & a & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & a & \\ & & & & 0 & a \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a^n & & * \\ & & & 0 & a^n & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & & 0 & a^n \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n \text{ zer}$$

Każda klatka Jordana macierzy J jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Podnosząc macierz J odpowiednio do 2, 5 potęgi podnosimy jej klatki do danej potęgi, będą one postaci odpowiednio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 5 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze $J^2 - I$ oraz $J^5 - I$ będą zatem mieć klatki postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 2 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 5 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Z tego, że macierze $J^2 - I$ i $J^5 - I$ mają klatki tych samych rozmiarów oraz z faktu podanego na początku rozwiązania wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{r}\left(\left(J^2 - I\right)^n\right) = \mathrm{r}\left(\left(J^5 - I\right)^n\right)$$

a to dowodzi tezie.

Zadanie 5

Znajdź, w zależności od wartości $t \in \mathbb{R}$, bazę punktową przekroju:

$$\mathrm{af}([1,2,3],[0,3,4],[3,t,1+t^2]) \ \cap \ \mathrm{af}([-1,1,0],[0,2,3],[1,1,2])$$

Rozwiązanie:

Znajdziemy równanie opisujące przestrzeń

$$M := \mathrm{af}([-1,1,0],[0,2,3],[1,1,2]) = [-1,1,0] + \mathrm{lin}([1,1,3],[2,0,2])$$

W tym celu szukamy równania opisującego $T(M)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & z \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_1 - 2w_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z - x - 2y \end{array}\right]$$

czyli $T(M)$ jest opisane równaniem $x + 2y - z = 0$. Wstawiając współrzędne punktu [-1,1,0] otrzymujemy wartość 1, zatem równanie przestrzeni M to:

$$x + 2y - z = 1 \tag{$*$}$$

Sparametryzujemy teraz drugą przestrzeń:

$$N_t := \mathrm{af}([1,2,3],[0,3,4],[3,t,1+t^2]) = [1,2,3] + \mathrm{lin}([-1,1,1],[2,t-2,t^2-2]) =$$

$$= \Big\{[1 - a + 2b, 2 + a + b(t-2), 3 + a + b(t^2-2)] : \quad a, b \in \mathbb{R}\Big\}$$

Wstawiając uzyskane wyżej współrzędne punktów przestrzeni N_t do równania $(*)$ mamy:

$$1 - a + 2b + 4 + 2a + 2b(t-2) - 3 - a - b(t^2-2) = 1$$

$$1 + 2bt - bt^2 = 0$$

$$1 + bt(2-t) = 0$$

Dla $t \in \{0,2\}$ otrzymujemy sprzeczność, zatem przecięcie jest puste.
Jeśli $t \notin \{0,2\}$ to:

$$b = \frac{1}{t(t-2)}$$

Wynika stąd, że dla $t \notin \{0,2\}$ mamy:

$$N_t \cap M = \left\{\left[1 - a + \frac{2}{t(t-2)}, 2 + a + \frac{1}{t}, 3 + a + \frac{t^2-2}{t(t-2)}\right] : \quad a \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left[1 + \frac{2}{t(t-2)}, 2 + \frac{1}{t}, 3 + \frac{t^2-2}{t(t-2)}\right] + \mathrm{lin}([-1,1,1]) =$$

$$= \mathrm{af}\left(\left[1 + \frac{2}{t(t-2)}, 2 + \frac{1}{t}, 3 + \frac{t^2-2}{t(t-2)}\right], \left[\frac{2}{t(t-2)}, 3 + \frac{1}{t}, 4 + \frac{t^2-2}{t(t-2)}\right]\right)$$