Rozwiązania

Seria 2

17 marca 2013

Zadanie 1

Podaj postać Jordana macierzy $\begin{bmatrix} 4 & t & 1 \\ 0 & 4 & t-1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *w zależności od parametru* $t \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Niech A_t będzie macierzą z treści zadania. Zauważmy, że A_t jest górnotrójkątna, zatem jej wartościami własnymi są elementy na przekątnej, czyli: 4, 4, 4.
Znajdziemy teraz rząd $A_t - 4I$ w zależności od parametru t:

$$\mathrm{r}\,(A_t - 4I) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \\ 1 & \text{dla} \quad t \in \{0,1\} \end{cases}$$

Wynika stąd, że dla $t \in \{0,1\}$ $\dim\ker(A_t - 4I) = 3 - 1 = 2$, więc A_t ma dwie klatki Jordana, a ponieważ jest macierzą 3×3 to klatki muszą być wymiarów 2×2 oraz 1×1. Dla $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $\dim\ker(A_t - 4I) = 3 - 2 = 1$, zatem A_t ma jedną klatkę (wymiaru 3×3).
Postać Jordana macierzy A_t dla $t \in \{0,1\}$ to $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, a dla $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ to $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2

Niech $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ *będzie takim endomorfizmem, że każda podprzestrzeń* $\mathbb{K}^n$ *jest niezmiennicza. Wykaż, że* f *jest homotetią.*

Rozwiązanie:
Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą $\mathbb{K}^n$. Z założenia każda z podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_i)$ jest niezmiennicza, zatem:

$$\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} \quad f(\alpha_i) = a_i \cdot \alpha_i \quad \text{gdzie } a_i \in \mathbb{K}$$

Wiemy także, że $\mathrm{lin}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ jest niezmiennicza, czyli:

$$f(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = a \cdot (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{K}$$

Z drugiej strony:

$$f(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = f(\alpha_1) + \cdots + f(\alpha_n) = a_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + a_n \cdot \alpha_n$$

Porównując otrzymane zależności mamy:

$$a \cdot (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = a_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + a_n \cdot \alpha_n$$

$$(a - a_1) \cdot \alpha_1 + \cdots + (a - a_n) \cdot \alpha_n = 0$$

co wobec liniowej niezależności układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oznacza, że:

$$a - a_1 = \cdots = a - a_n = 0 \iff a_1 = \cdots = a_n = a$$

Weźmy dowolny $\beta \in \mathbb{K}^n$. Wówczas $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, więc:

$$f(\beta) = f(\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^n b_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n b_i a \alpha_i = a \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i = a\beta$$

Stąd f jest homotetią, co mieliśmy pokazać.

Zadanie 3
Niech $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ będzie endomorfizmem, zaś $w(x) \in \mathbb{K}[x]$ wielomianem. Wykaż, że jeżeli k jest wartością własną f, to $w(k)$ jest wartością własną $w(f)$.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że k jest wartością własną f, tzn. istnieje $\alpha \neq \mathbf{0}$ taki, że $f(\alpha) = k\alpha$. Niech $w(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Poniżej skorzystamy z tego, że dla $m \in \mathbb{N}$ mamy:

$$f^m(\alpha) = f^{m-1}(k\alpha) = kf^{m-1}(\alpha) = \cdots = k^m \alpha$$

Zachodzi zatem:

$$w(f)(\alpha) = (a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0)(\alpha) = a_n f^n(\alpha) + \cdots + a_1 f(\alpha) + a_0 \alpha =$$

$$= a_n k^n \alpha + \cdots + a_1 k\alpha + a_0 \alpha = (a_n k^n + \cdots + a_1 k + a_0)\alpha = w(k) \cdot \alpha$$

Wynika stąd, że $w(k)$ jest wartością własną $w(f)$, co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 4
Niech $M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.
a) Znajdź bazę, w której macierz f jest w postaci Jordana.
b) Zbadaj, czy macierze $M(f)$ i $M(f^3)$ są podobne.

Rozwiązanie:
Szukamy wartości własnych endomorfizmu f:

$$w_f(\lambda) = \det(M(f) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) - 4(-1-\lambda)(-3) = (1+\lambda)\left((3-\lambda)(4+\lambda) - 12\right) =$$
$$= (1+\lambda)(-\lambda^2 - \lambda) = -\lambda(1+\lambda)^2$$

Stąd wartości własne f to 0, -1, -1. Możemy teraz przystąpić do wyznaczenia bazy Jordana $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

$$M(f) - 0I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_3 - w_1 \\ -w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_2 \\ w_3 - 4w_1 + w_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zatem wektorem własnym o wartości własnej 0 jest $\alpha_1 = (1, 0, 1)$.

$$M(f) + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc $\ker(M(f) + I) = \operatorname{lin}((3, 0, 4))$.

$$(M(f) + I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_1 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli $\ker\left((M(f) + I)^2\right) = \operatorname{lin}((3, 0, 4), (0, 3, -1))$. Wynika stąd, że jako α_3 możemy przyjąc $\alpha_3 = (0, 3, -1)$. Obliczamy $\alpha_2 = (M(f) + I)\alpha_3^T = (9, 0, 12)$.
W bazie $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (9, 0, 12), (0, 3, -1)\}$ macierz f ma postać Jordana.

Wykażemy teraz, że $M(f)$ i $M(f^3)$ są podobne. Z naszych obliczeń wynika, że:

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M(f^3)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \left(M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: B$$

Znajdziemy postać Jordana macierzy B. Wartości własne B to 0, -1, -1. Zachodzi także:

$$\operatorname{r}(B + I) = \operatorname{r}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

zatem B posiada 3-2=1 klatkę Jordana odpowiadającą wartości własnej -1. Stąd $M(f)$ oraz B mają takie same postaci Jordana, czyli są podobne. Ponadto B i $M(f^3)$ są podobne (bo są macierzami tego samego endomorfizmu w różnych bazach), a stąd wynika teza.

Zadanie 5
Niech $\varphi : V \longrightarrow V$ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni nad ciałem $\mathbb{C}$. Udowodnij równoważność następujących warunków:
(1) φ posiada skończenie wiele przestrzeni niezmienniczych;
(2) macierz Jordana dla φ zawiera tylko po jednej klatce dla każdej wartości własnej.

Rozwiązanie:
Z założenia V jest skończenie wymiarową przestrzenią nad $\mathbb{C}$, zatem istnieje baza, w której macierz φ ma postać Jordana.

(1) $\Longrightarrow$ (2)
Przypuśćmy, że φ posiada skończenie wiele przestrzeni niezmienniczych oraz istnieje taka wartość własna a, że macierz Jordana dla φ zawiera co najmniej dwie klatki odpowiadające wartości a. Wynika stąd, że istnieją liniowo niezależne wektory własne $\alpha, \beta \in V$ o wartości własnej a. Niech $W_n = \text{lin}(\alpha + n\beta)$. Oczywiście $\varphi(\alpha + n\beta) = a(\alpha + n\beta)$, zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ podprzestrzeń W_n jest niezmiennicza. Ponadto łatwo widać, że dla $m \neq n$ zachodzi $W_m \neq W_n$. Wykazaliśmy, że φ posiada nieskończenie wiele przestrzeni niezmienniczych wbrew założeniu, co kończy dowód pierwszej implikacji.

(2) $\Longrightarrow$ (1)
Załóżmy, że macierz Jordana dla φ zawiera tylko po jednej klatce dla każdej wartości własnej. Udowodnimy przez indukcję po liczbie klatek Jordana, że φ posiada skończenie wiele przestrzeni niezmienniczych (wykażemy, że bazą każdej z nich jest pewien podzbiór bazy Jordana dla φ).
Przypuśćmy, że macierz φ w postaci Jordana ma jedną klatkę. Niech a będzie jedyną wartością własną φ, a $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ bazą Jordana dla φ.
Niech W będzie podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia φ. Weźmy dowolny niezerowy wektor $\beta \in W$. Wówczas $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_k$, przy czym zakładamy, że k jest największą liczbą taką, że $b_k \neq 0$. Pokażemy, że $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$. Wiemy, że:

$$\varphi(\beta) = b_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + b_k\varphi(\alpha_k) = b_1 a\alpha_1 + b_2(\alpha_1 + a\alpha_2) + \cdots + b_k(\alpha_{k-1} + a\alpha_k) =$$

$$= a(b_1\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_k) + (b_2\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_{k-1}) = a\beta + (b_2\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_{k-1})$$

Ponadto z założenia $\varphi(\beta) \in W$, zatem: $b_2\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_{k-1} = \varphi(\beta) - a\beta \in W$.
Postępując analogicznie możemy wykazać, że:

$$b_3\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_{k-2},\ b_4\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_{k-3},\ \ldots,\ b_{k-1}\alpha_1 + b_k\alpha_2,\ b_k\alpha_1 \ \in W$$

Założyliśmy, że $b_k \neq 0$, zatem $\alpha_1 \in W$. Wynika stąd, że

$$(b_{k-1}\alpha_1 + b_k\alpha_2) - b_{k-1}\alpha_1 = b_k\alpha_2 \in W \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 \in W$$

W analogiczny sposób dostajemy, że $\alpha_3, \ldots, \alpha_k \in W$, czyli $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$. Wynika stąd, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ dla pewnego $l \geqslant k$ (l jest największą z liczb $1, 2, \ldots, n$ taką,

że istnieje wektor z podprzestrzeni W o niezerowej $l-$ tej współrzędnej w bazie $\mathcal{A}$).
Stąd jedynymi podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu φ są

$$\mathbf{0},\ \mathrm{lin}(\alpha_1),\ \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2), \ldots, \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

czyli jest ich skończenie wiele i bazą każdej jest podzbiór bazy Jordana dla φ.

Przypuśćmy, że teza zachodzi dla przekształceń o macierzy w postaci Jordana składającej się z $n-1$ klatek. Udowodnimy tezę dla macierzy o n klatkach.
Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$ będzie bazą Jordana dla φ taką, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ to wektory odpowiadające klatce o wartości własnej a na przekątnej, a $\beta_1, \ldots, \beta_m$ to pozostałe wektory.
Niech W będzie podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia φ. Weźmy

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \cdots + b_m\beta_m \in W$$

przy czym zakładamy, że k jest największym numerem takim, że $a_k \neq 0$. Postępując analogicznie jak poprzednim przypadku, tzn. biorąc obraz wektora γ oraz odejmując od niego $a\gamma$, a następnie powtarzając to jeszcze $k-1$ razy do otrzymywanych kolejno wektorów, wyzerujemy wszystkie współrzędne odpowiadające wektorom własnym o wartości własnej a. Warto podkreślić, że w wyniku wykonywanych operacji może ulec zmianie pozostałych m współrzędnych, jednakże jeśli $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ są wszystkimi wektorami odpowiadającymi klatce o wartości własnej $b \neq a$ z bazy Jordana, i_r jest największym numerem spośród $\{i_1, \ldots, i_s\}$ takim, że i_r-ta współrzędna wektora γ jest niezerowa, to po wykonaniu opisanych operacji otrzymamy wektor o i_r-tej współrzędnej niezerowej (bo $b \neq a$).
Macierz w postaci Jordana przekształcenia φ' będącego obcięciem φ do $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ ma $n-1$ klatek, zatem z założenia indukcyjnego przecięcie $W \cap \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ ma bazę będącą pewnym podzbiorem bazy Jordana dla φ. Dla danej wartości własnej b w bazie tej znajdą się początkowe wektory z "łańcucha": od pierwszego do najdalszego, dla którego istnieje wektor w W o niezerowej współrzędnej odpowiadającej temu wektorowi (wynika to z tego co napisaliśmy punkt wyżej).
Możemy zatem postąpić analogicznie jak w pierwszym przypadku ($n = 1$) i pokazać, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in W$, a stąd wynika, że bazą W jest pewien podzbiór bazy Jordana.
Zatem φ ma skończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych, a to kończy krok indukcyjny i cały dowód.