Rozwiązania

Seria 1

11 marca 2013

Zadanie 1

Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie określone macierzą $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.
a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ.
b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.

Rozwiązanie:
Wyznaczymy najpierw wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Wartości własne macierzy A to: 2, 3, 4.
Znajdziemy teraz wektor własny odpowiadający wartości własnej 2:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \frac{1}{2}w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - \frac{1}{2}w_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} w_1 \\ -w_2 \\ w_3 - w_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem szukanym wektorem jest $\alpha_2 = [0, 2, 1]$.
Analogicznie wyznaczamy pozostałe wektory własne:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_2 - 2w_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{więc } \alpha_3 = [0, 1, 1]$$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} w_3 \\ w_2 - 2w_3 \\ w_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{więc } \alpha_4 = [2, 2, 1]$$

Bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych ϕ jest $\mathcal{A} = \{[0,2,1],[0,1,1],[2,2,1]\}$. By zapisać $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ nie musimy już wykonywać dodatkowych obliczeń, bowiem wiemy, że $\phi(\alpha_2) = 2\alpha_2$, czyli jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ to: 2,0,0. Analogicznie współrzędne $\phi(\alpha_3)$ to 0,3,0, a $\phi(\alpha_4)$ to 0,0,4. Stąd:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Niech $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ będzie endomorfizmem opisanym macierzą: $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ t & 5 \end{bmatrix}$. Wiedząc, że zbiór wektorów własnych tworzy podprzestrzeń, znajdź t oraz opisz wektory własne.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jeśli f będzie miało dwie różne wartości własne, to zbiór wektorów własnych nie będzie tworzył podprzestrzeni liniowej. Istotnie: niech α, β będą wektorami własnymi o wartościach własnych odpowiednio a i b $(a \neq b)$. Przypuśćmy, że $\alpha + \beta$ jest wektorem własnym, tzn. $f(\alpha + \beta) = c(\alpha + \beta)$. Z drugiej strony $f(\alpha + \beta) = a\alpha + b\beta$. Mamy zatem $c\alpha + c\beta = a\alpha + b\beta$, czyli $(c - a)\alpha + (c - b)\beta = 0$. Wiemy także, że α i β są liniowo niezależne (bo odpowiadają różnym wartościom własnym), więc musi zachodzić $c - a = c - b = 0$, czyli $a = b$ wbrew założeniu. Oczywiście suma wektorów własnych odpowiadających tej samej wartości własnej (jak i iloczyn takiego wektora przez skalar) jest wektorem własnym o tej samej wartości własnej. Wynika stąd, że zbiór wektorów własnych będzie tworzył podprzestrzeń liniową wtedy i tylko wtedy, gdy f będzie miało dokładnie jedną wartość własną.

Możemy teraz przystąpić do znalezienia parametru t.

Wyznaczamy wielomian charakterystyczny danej macierzy:

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ t & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 5t = \lambda^2 - 6\lambda + 5 - 5t$$

Na mocy tego co napisaliśmy powyżej wynika, że musi zachodzić $\Delta = 0$, czyli:

$$\Delta = (-6)^2 - 4(5 - 5t) = 16 + 20t = 0 \iff t = -\frac{4}{5}$$

Dla $t = -\frac{4}{5}$ jedyną wartością własną jest $\frac{6}{2} = 3$. Szukamy wektorów własnych:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 5 \\ -\frac{4}{5} & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -\frac{4}{5} & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} w_1 \\ w_2 - \frac{2}{5}w_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc zbiór wektorów własnych to lin((5,2)).

Zadanie 3
Niech $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^2)$ będzie takim endomorfizmem, że $\dim \ker f = 1$. Wykaż, że istnieje baza $\mathbb{Q}^2$ złożona z wektorów własnych f lub znajdź kontrprzykład.

Rozwiązanie:
Niech f będzie zadane macierzą $A = M(f)^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Oczywiście $\dim \ker f = 1$. Wielomianem charakterystycznym macierzy A jest $w_A(\lambda) = \lambda^2$, jedyną wartością własną A jest 0.

$$\ker(A - 0I) = \ker(A) = \mathrm{lin}((1,0)) \neq \mathbb{Q}^2$$

zatem nie istnieje baza $\mathbb{Q}^2$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f.

Zadanie 4
a) Znajdź rozkład Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

b) Oblicz A^{100}.

Rozwiązanie:
Niech φ będzie takim przekształceniem, że $M(\varphi)^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} = A$. Najpierw znajdziemy wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -3-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -8 \\ 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = ((-1-\lambda)(-3-\lambda)+1)((2-\lambda)(-6-\lambda)+16) =$$

$$= (\lambda^2 + 4\lambda + 3 + 1)(\lambda^2 + 4\lambda - 12 + 16) = (\lambda + 2)^4$$

Zatem wartości własne macierzy A to: -2, -2, -2, -2.
Możemy teraz przystąpić do szukania bazy $\mathcal{A}$, w której $M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ jest w postaci Jordana.

$$A+2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_1 + w_4 \\ w_2 - w_1 \\ \frac{1}{2} w_4 \\ w_3 - 2w_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} w_1 \\ w_3 \\ w_2 - 3w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z postaci schodkowej zczytujemy: $\ker(A+2I) = \mathrm{lin}((1,1,0,0),(0,0,2,1))$.

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} -\frac{1}{3}w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $\ker(A+2I)^2 = \mathrm{lin}((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,2,1))$.
Nietrudno zauważyć, że $(A+2I)^3 = \mathbf{0}$, więc $\ker(A+2I)^3 = \mathbb{R}^4$.
Z naszych obliczeń wynika, że macierz φ w postaci Jordana będzie miała dwie klatki: jedną wymiaru 3×3 i drugą 1×1.
Wybierzmy jakikolwiek $\alpha_3 \in \ker(A+2I)^3 \setminus \ker(A+2I)^2$, niech $\alpha_3 = (0,0,1,0)$. Wówczas mamy wyznaczone $\alpha_2 = (A+2I)\alpha_3^T = (-2,1,4,2)$ oraz $\alpha_1 = (A+2I)\alpha_2^T = (-3,-3,0,0)$.
Wystarczy jeszcze dobrać $\alpha_4 \in \ker(A+2I) \setminus \mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, przyjmijmy $\alpha_4 = (0,0,2,1)$.
$\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ jest bazą $\mathbb{R}^4$, w której macierz przekształcenia φ ma postać:

$$J = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Niech $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathrm{st}}$, mamy zatem $A = CJC^{-1}$. Szukamy C^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} w_2 \\ w_1 - w_2 \\ w_3 - 2w_4 \\ w_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} -\frac{1}{3}(w_1 + \frac{1}{3}w_2) \\ -\frac{1}{3}w_2 \\ w_3 \\ w_4 + \frac{2}{3}w_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Zatem:

$$C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 6 & -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Obliczymy teraz A^{100}:

$$A^{100} = (CJC^{-1})^{100} = CJ^{100}C^{-1} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{100} & -100 \cdot 2^{99} & 50 \cdot 99 \cdot 2^{98} & 0 \\ 0 & 2^{100} & -100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 6 & -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5

Niech M bedzie macierzą $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{C}$. Udowodnij, że M jest podobna do M^T.

Rozwiązanie:

Z założenia wiemy, że M oraz M^T mają po n wartości własnych (licząc z krotnościami), bowiem są macierzami o współczynnikach w ciele $\mathbb{C}$. Wykażemy, że mają ten sam wielomian charakterystyczny (czyli te same wartości własne):

$$\det(M^T - \lambda I) = \det((M^T - \lambda I)^T) = \det((M^T)^T - (\lambda I)^T) = \det(M - \lambda I)$$

Powyżej skorzystaliśmy z faktu, że wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi danej macierzy. Wystarczy jeszcze pokazać, że postaci Jordana macierzy M i M^T mają tyle samo klatek tych samych wymiarów. Istotnie: przypuśćmy, że c jest wartością własną macierzy M i M^T, $k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$\mathrm{r}\left((M^T - cI)^k\right) = \mathrm{r}\left(((M^T - cI)^k)^T\right) = \mathrm{r}\left(((M^T - cI)^T)^k\right) =$$

$$= \mathrm{r}\left(((M^T)^T - (cI)^T)^k\right) = \mathrm{r}\left((M - cI)^k\right)$$

W powyższych rachunkach korzystaliśmy z tego, że transpozycja nie zmienia rzędu macierzy oraz z równości $(A^k)^T = (A^T)^k$, którą przez prostą indukcję można uzyskać z równości $(AB)^T = B^T A^T$.

Wynika stąd, że:

$$\dim\ker((M - cI)^k) = \dim\ker((M^T - cI)^k)$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ oraz dowolnej wartości własnej c macierzy M, a to dowodzi tezie.