Zadania domowe z GAL I — seria A (termin: 25 I)

1. Niech
$$V = \mathrm{lin}\big((1,1,3,2),\ (4,5,2,5),\ (2,3,-4,1),\ (1,2,-5,5)\big)$$

a) Znajdź bazę i wymiar V.
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $\alpha_1 \in V$, $\alpha_1 + 2\alpha_3 \in V$ oraz wektor $\beta = (1,1,3,3)$ ma w tej bazie współrzędne $(0,t,1,0)$? Dla każdego takiego t podaj odpowiedni przykład.

2. Niech

$$V = \mathrm{lin}\big((1,2,2,3),\ (1,-1,1,-1),\ (2,1,3,t+2)\big),$$
$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = s-1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + (s^2-1)x_4^2 = 0 \end{cases}$$

a) Opisz podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^4$ układem równań liniowych.
b) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ zbiór W jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$? Dla każdego takiego s znajdź bazę W.

3. Niech

$$V = \mathrm{lin}\big((1,2,1,3),\ (3,5,2,4),\ (1,3,t,8)\big),$$
$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + sx_4 = 0 \end{cases}$$

a) W zależności od wartości $s, t \in \mathbb{R}$ znajdź bazy przestrzeni $V + W$ oraz $V \cap W$.
b) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$?

4. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane warunkami

$$\varphi\big((1,1)\big) = (2,1,3), \qquad \varphi\big((1,2)\big) = (4,2,t).$$

a) Znajdź wzór na φ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\mathcal{A}: \quad (3,2),\ (1,2), \qquad\qquad \mathcal{B}: \quad (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1).$$

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\mathrm{im}\,\psi = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2\}$ oraz $\ker(\psi \circ \phi) = \{(0,0)\}$? Dla każdego takiego t podaj odpowiedni przykład.

5. Niech

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4,\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4,\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4),$$
$$Z = \{\psi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \,|\, \psi \circ \varphi = 0,\ \mathrm{im}\,\psi \subseteq \mathrm{lin}\big((1,0,0),(1,2,2)\big)\}$$

a) Znajdź bazę $\mathrm{im}\,\varphi$.
b) Znajdź wymiar przestrzeni Z.

c) Podaj przykład $\psi \in Z$ takiego, że ψ jest rzędu 1.

6. Niech

$$\mathcal{A}: \quad (1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,2,2), \qquad\qquad \mathcal{B}: \quad (1,1),\ (1,2),$$
$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M(\psi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$. Znajdź współrzędne $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, jeśli $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3$ (α_i oznaczają kolejne wektory z bazy $\mathcal{A}$).
b) Znajdź wymiar jądra oraz bazę obrazu $\varphi \circ \psi$.

7. Niech

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3),$$
$$\mathcal{A}: \quad (3,4,5),\ (1,3,-2),\ (0,1,-2), \qquad\qquad \mathcal{B}: \quad (0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,1)$$

a) Oblicz $M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathrm{st}^*}$.
b) Znajdź współrzędne $\varphi^*(\varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)$ w bazie $\mathcal{A}^*$.
c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje $\psi \in \ker \varphi^*$ takie, że $\ker \psi = \mathrm{lin}\big((1,3,2),(2,-4,t)\big)$?

8. Niech $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} s & s & s & \dots & s & s \\ s & 1 & s & \dots & s & s \\ s & s & 2 & \dots & s & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s & s & s & \dots & n-1 & s \\ s & s & s & \dots & s & n \end{bmatrix}$$

a) Zakładając, że $s = n + 1$, oblicz $\det A$. Wykaż, że w takiej sytuacji A jest odwracalna.
b) Czy może się zdarzyć, że $s = 4n$ oraz $\det A = 26 \cdot 3^5$?

9. Niech V, W będą (niekoniecznie skończenie wymiarowymi) przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to V$ będą przekształceniami liniowymi.
a) Udowodnij, że jeśli $V' \subseteq V$ jest podprzestrzenią taką, że $\varphi|_{V'}$ jest monomorfizmem oraz $\varphi(V') = \varphi(V)$, to $V = V' \oplus \ker \varphi$.
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi \circ \psi$ jest izomorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$.

10. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie górnotrójkątna i taka, że $A^n = 0$. Udowodnij, że $\det(A+I) = 1$.