Zadania domowe z GAL I — seria 9 (termin: 13 I)

Rozwiąż wybrane ***trzy*** *spośród poniższych zadań.*

1. Niech $\varphi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_3)$. Znajdź wymiar przestrzeni:

$$Z_1 = \big\{\psi \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3) \,\big|\, \psi\big((1,0,0,0,0)\big) = (0,0,0) \text{ oraz } \varphi \circ \psi = 0\big\},$$
$$Z_2 = \big\{\psi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4) \,\big|\, \operatorname{im}\psi \subseteq \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 = 0\} \text{ oraz } \psi \circ \varphi = 0\big\}.$$

2. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
Przedstaw macierze A oraz A^{-1} jako iloczyny macierzy elementarnych.

3. Rozważmy następujące bazy w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & (1,1,-1), & (2,3,0), & (-1,0,4), \\ \mathcal{B}: & (1,0,5), & (2,1,8), & (1,3,0) \end{array}$$

a) Znajdź bazę $\mathcal{A}^*$.
b) Niech $\varphi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = 3x_1 + x_2 - 4x_3$. Wyznacz współrzędne funkcjonału φ w bazie $\mathcal{B}^*$.
(Przypominam, że w tym celu nie trzeba obliczać bazy $\mathcal{B}^*$!)
c) Znajdź taką bazę $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ w $\mathbb{R}^3$, żeby baza $\mathcal{C}^*$ była następująca:

$$\alpha_1^* + \alpha_2^*, \quad \alpha_2^*, \quad 2\alpha_3^*,$$

gdzie α_i^* oznaczają funkcjonały z bazy $\mathcal{A}^*$.
(Wskazówka: Można to zrobić na piechotę. Jednak najprościej jest zacząć od obliczenia współrzędnych γ_i w bazie $\mathcal{A}$ - to akurat da się zrobić prostym rachunkiem, który byłby wykonalny nawet wtedy, gdyby w zadaniu baza $\mathcal{A}$ była nieznana. A wtedy już bardzo łatwo obliczyć same γ_i.)

4. (CUKIEREK) Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\varphi : V \to V$ będzie liniowe.
a) Udowodnij, że jeśli w ciele K zachodzi $1 + 1 \neq 0$, to istnieją izomorfizmy $\varphi_1, \varphi_2 : V \to V$ takie, że $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
b) *(niepunktowane, ale można dostać drugi CUKIEREK)* Podaj przykład takiego φ, którego nie można przedstawić w postaci sumy dwóch izomorfizmów.