Zadania domowe z GAL I — seria 8 (termin: 20 XII)

*Wybierz **trzy** spośród poniższych zadań.*

1. Niech

$$\begin{array}{lc} \mathcal{A}: & \alpha_1 = (1,-1), \qquad \alpha_2 = (-1,2), \\ \mathcal{B}: & \beta_1 = (1,0,1), \qquad \beta_2 = (-1,1,0), \qquad \beta_3 = (1,2,4), \\ \mathcal{C}: & \gamma_1 = (3,1), \qquad \gamma_2 = (4,1), \end{array}$$

$$\varphi\big((x_1,x_2)\big) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_2),$$

$$M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Oblicz:
a) Współrzędne wektora $\psi\big((1,0,0)\big)$ w bazach $\mathcal{C}$ oraz st;
b) Współrzędne $\psi(\beta_2 - 3\beta_3)$ w bazie $\mathcal{C}$;
c) Macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$;
d) Współrzędne wektora $\psi(\varphi(\alpha))$ w bazie st, gdzie α jest wektorem mającym w $\mathcal{A}$ współrzędne $(-1,3)$.

2. Niech

$$M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ istnieją bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ takie, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}?$$

Podaj przykładowe bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dla każdej wartości a, dla której jest to możliwe.

3. (Use of GAL) W każdym z poniższych przykładów uzupełnij drugie zdanie tak, by było równoważne pierwszemu, używając przy tym pogrubionego słowa (chyba, że w danym przykładzie go nie ma). *(Zupełnie jak na angielskim, z tym, że wolno użyć ponad pięciu słów ;)*

0)		Niech φ będzie zadane wzorem $\varphi(\alpha) = 3 \cdot \alpha$.
	skala	Niech φ będzie <u>*jednokładnością o **skali** 3.*</u>
a)		Przekształcenie φ prowadzi z $\mathbb{R}^{14}$ do $\mathbb{R}^{17}$.
		Macierz przekształcenia φ ma __ wierszy i __ kolumn.
b)		Przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest epimorfmizmem.
	rząd	Macierz przekształcenia φ ________________.

c) Przekształcenie φ jest monomorfizmem.
Dla dowolnego wektora α, jeśli ____ $= 0$, to ____ $= 0$.

d) Wiadomo, że $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ ma postać $\begin{bmatrix} ? & 1 & ? & ? \\ ? & 3 & ? & ? \\ ? & 7 & ? & ? \end{bmatrix}$.
współrzędne Wiadomo, że ________________.

e) Niech X będzie macierzą złożenia $\varphi \circ \psi$ z bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$.
iloczyn Niech X będzie ________________, gdzie Y jest macierzą __ z bazy __ do $\mathcal{B}$, zaś Z jest macierzą __ z bazy __ do __.

f) Przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}^{38}$ zabija pewne 4 niezależne wektory.
Wymiar $\operatorname{im}\varphi$ wynosi co naj____ej ____.

g) Macierz $M(\varphi)^{\mathrm{st}}_{\mathcal{A}}$ ma dwie kolumny; ich sumą jest $\begin{bmatrix} -5 \\ 13 \\ 107 \end{bmatrix}$.
φ prowadzi z __ do __; wartością φ na ________ jest ________.

h) Macierz $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathrm{st}}$ ma trzy kolumny; różnica drugiej i trzeciej to $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.
φ prowadzi z __ do __; wartością φ na ________ jest ________.

i) Wektor α jest rozwiązaniem układu równań o macierzy $\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & 0 \end{array}\right]$.
Iloczyn macierzy ________________.

j) Niech $V = W \oplus Z$ i niech $\varphi : V \to V$ spełnia $\varphi|_W = \mathrm{id}_W$, $\varphi|_Z = 0$.
wzdłuż Niech $V = W \oplus Z$ i niech $\varphi : V \to V$ będzie ________________.

k) Istnieją bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Rząd przekształcenia φ ________________.

l) Przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest epimorfizmem.
niezależne W macierzy przekształcenia φ ________________.

4. (CUKIEREK) Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Niech W_1, W_2 jej podprzestrzeniami w V i niech $\psi : W_1 \to W_2$ będzie izomorfizmem.
a) Udowodnij, że jeśli $\dim V < \infty$, to istnieje izomorfizm $\varphi : V \to V$ taki, że $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$ dla wszystkich $\alpha \in W_1$.
b) Podaj przykład takich V, W_1, W_2, φ, że teza podpunktu **a)** nie zachodzi.