Zadania domowe z GAL I — seria 7 (termin: 9 XII)

*Wybierz **trzy** spośród poniższych zadań.*

1. Niech:

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na $\operatorname{lin}\big((1,-1,1)\big)$ wzdłuż $\operatorname{lin}\big((1,0,-1),\ (1,1,-2)\big)$;
- $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o skali -4;
- $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem o macierzy (w bazach standardowych)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -7 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

- $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie obrotem wokół osi OZ w $\mathbb{R}^3$ o kąt 90° *(a ponieważ można wykonać obrót w dwóch kierunkach, precyzujemy kierunek za pomocą następującej informacji)* takim, że

$$\theta\big((1,1,1)\big) = (-1,1,1)$$

Wyznacz:
a) Macierz przekształcenia $\varphi + 2\cdot\psi$ (w bazach standardowych);
b) Wzór na $\chi - \theta$.

2. Niech $\varphi, \psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będą przekształceniami liniowymi. Wiadomo, że rząd φ wynosi 3 oraz że

$$\psi\Big(\operatorname{lin}\big((1,2,3,4),\ (0,-1,3,5)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,-1,2,0),\ (1,-1,2,a)\big).$$

Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ oraz $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ istnieją φ, ψ spełniające powyższe założenia i takie, że rząd złożenia $\varphi \circ \psi$ wynosi r? W każdej takiej sytuacji podaj odpowiedni przykład. *(Wystarczy, że zadasz wartości przekształceń φ, ψ na dowolnych wybranych przez siebie bazach $\mathbb{R}^4$ — w tym zadaniu chodzi o myślenie, nie o liczenie)*

3. Udowodnij uwagę 4.6 ze skryptu, tzn. że jeśli $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $\ker\varphi$ jest podprzestrzenią liniową w V, zaś $\operatorname{im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową w W.

4. (CUKIEREK) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie *(niekoniecznie liniowe!)* $\varphi : V \to W$ nazywamy *addytywnym*, jeśli

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \qquad \text{dla każdych } \alpha, \beta \in V.$$

Oczywiście każde przekształcenie liniowe jest z definicji addytywne, ale czy jest na odwrót?

a) Udowodnij, że jeśli $K = \mathbb{Q}$, to każde przekształcenie addytywne jest liniowe.
b) Udowodnij, że istnieją przekształcenia addytywne nieliniowe. *(Wskazówka: możesz wskazać przykład dla $K = \mathbb{C}$ oraz $V = W = \mathbb{C}$. Dla $K = \mathbb{R}$ też istnieją przykłady, ale to jest chyba trudniejsze.)*