Zadania domowe z GAL I — seria 6 (termin: 2 XII)

Wybierz ***trzy*** *spośród poniższych zadań.*

1. Niech

$$V = \operatorname{lin}\big((1,5,3,0),\ (1,-1,a,3),\ (1,1,-1,2)\big),$$
$$W = \operatorname{lin}\big((1,1,1,2),\quad (0,2,1,b)\big),$$
$$Z = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1 + x_2 = x_4\}$$

Znajdź wymiary przestrzeni

$$V, \quad W, \quad V+W, \quad V\cap W, \quad W\cap Z.$$

Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $V + W = V \oplus W$?
(Wskazówka: w tym zadaniu wystarczy zeschodkować dwie macierze i rozwiązać jeden układ równań 2×2*).*

2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane przez warunki

$$\varphi\big((1,2)\big) = (1,3,4),$$
$$\varphi\big((2,5)\big) = (2,7,9)$$

a) Czy istnieje $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\psi\circ\varphi$ jest jednokładnością o skali 2?
b) *(tu niczego nie trzeba liczyć :)* Czy istnieje $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\varphi\circ\chi$ jest jednokładnością o skali -1?
Jeśli którakolwiek odpowiedź jest twierdząca, podaj odpowiedni przykład.

3. a) Udowodnij uwagę 4.7 ze skryptu, tzn. że jeśli $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym oraz jeśli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rozpina V, to układ $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ rozpina $\operatorname{im}\varphi$.
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi : V \to W$ jest monomorfizmem *(czyli liniowe i różnowartościowe)* oraz jeśli $V_1, V_2 \subseteq V$ są podprzestrzeniami takimi, że istnieje $V_1 \oplus V_2$, to $\varphi(V_1 \oplus V_2) = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.

4. (CUKIEREK) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K. Niech $V_1, V_2 \subseteq V$ będą jej podprzestrzeniami takimi, że

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

Udowodnij, że jedna z podprzestrzeni V_1, V_2 zawiera się w drugiej.
(To zadanie wystąpiło kiedyś na kolokwium z numerem 5, ale moim zdaniem nie jest zbyt trudne, więc nie bójcie się tego cukierka)