Zadania domowe z GAL I — seria 4 (termin: 15 XI)

*Wybierz **trzy** spośród poniższych zadań.*

1. Niech
$$V = \operatorname{lin}\big((1,2,3,1),\ (1,-4,1,5),\ (1,-1,2,a)\big),$$
$$W = \operatorname{lin}\big((0,3,1,-2),\quad (1,5,4,b)\big),$$

a) Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $V \subseteq W$?
b) Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ podaj przykład wektora spoza V.

2. Niech

$$\alpha_1 = (1,1,2), \qquad \alpha_2 = (3,4,5), \qquad \alpha_3 = (2,3,t).$$

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{R}^3$?
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą $\mathbb{R}^3$?
c) Dla każdego t spełniającego warunek z punktu **b)** znajdź współrzędne wektora $\beta = (1,3,4)$ w bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. Niech $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ będzie niezależny układem wektorów. Niech $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$ również będzie niezależnym układem wektorów. Udowodnij, że układ
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$$
jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{lin}(A) \cap \operatorname{lin}(B) = \{0\}$.

4. (CUKIEREK) Niech funkcje $f_1, \ldots, f_n$ tworzą układ niezależny w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Udowodnij, że istnieją punkty $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takie, że wektory

$$\big(f_1(x_1),\ f_1(x_2),\ \ldots\ f_1(x_n)\big),$$
$$\big(f_2(x_1),\ f_2(x_2),\ \ldots,\ f_2(x_n)\big),$$
$$\vdots$$
$$\big(f_n(x_1),\ f_n(x_2),\ \ldots,\ f_n(x_n)\big)$$

tworzą układ niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.