Zadania domowe z GAL I — seria 10 (termin: 20 I)

*Rozwiąż wybrane **trzy** spośród poniższych zadań.*

1. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -3 & a & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla każdego takiego a oblicz *metodą wyznacznikową* A^{-1} oraz $\det(A^{-15})$.

2. Niech U będzie układem równań o macierzy

$$\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 1 \\ & b \end{array}\right]$$

(macierz A jest ta sama, co w poprzednim zadaniu).
a) Zbadaj *przez wyznaczniki*, dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ ma on jednoznaczne rozwiązanie.
b) Dla każdych takich a, b oblicz to rozwiązanie *przez wyznaczniki*.

3. Niech

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n & n \end{vmatrix}$$

(na przekątnej kolejne liczby naturalne, zaraz na lewo to samo, a poza tym same jedynki)
Udowodnij, że $A_n = 0$ dla n parzystych oraz $(n-1)!$ dla n nieparzystych.

4. Niech A będzie macierzą o współczynnikach całkowitych.
a) Udowodnij, że $\det A$ jest liczbą całkowitą.
b) Udowodnij, że jeśli $\det A = \pm 1$, to A^{-1} ma współczynniki całkowite.
c) Udowodnij, że jeśli A jest odwracalna i A^{-1} ma współczynniki całkowite, to $\det A = \pm 1$.
(Wskazówka: może Ci się przydać tw. Cauchy'ego)