

COQ

Daria Walukiewicz-Chrząszcz
Weryfikacja Wspomagana Komputerowo

30 maja 2014

Coq to “System wspomagania dowodzenia” (Proof assistant)

Coq to “System wspomaganie dowodzenia” (Proof assistant)

<http://coq.inria.fr/>

Coq to “System wspomaganie dowodzenia” (Proof assistant)

<http://coq.inria.fr/>

- użytkownik musi sam wymyślić metodę dowodu,

Coq to “System wspomaganie dowodzenia” (Proof assistant)

<http://coq.inria.fr/>

- użytkownik musi sam wymyślić metodę dowodu,
- system weryfikuje, czy krok zaproponowany przez użytkownika jest dopuszczalny,

Coq to “System wspomaganie dowodzenia” (Proof assistant)

<http://coq.inria.fr/>

- użytkownik musi sam wymyślić metodę dowodu,
- system weryfikuje, czy krok zaproponowany przez użytkownika jest dopuszczalny,
- oraz rozwiązuje podproblemy, dla których zaimplementowano w nim algorytmy automatycznego dowodzenia,

Coq to “System wspomaganie dowodzenia” (Proof assistant)

<http://coq.inria.fr/>

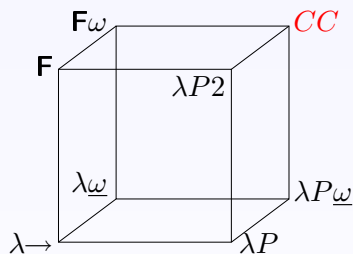
- użytkownik musi sam wymyślić metodę dowodu,
- system weryfikuje, czy krok zaproponowany przez użytkownika jest dopuszczalny,
- oraz rozwiązuje podproblemy, dla których zaimplementowano w nim algorytmy automatycznego dowodzenia,
- działanie systemu opiera się na stosowaniu reguł wnioskowania dla logiki, na której jest zbudowany.

Coq — formalizm

Coq — intuicjonistyczna logika wyższego rzędu
(rachunek konstrukcji (CC) + definicje indukcyjne)

Coq — formalizm

Coq — intuicjonistyczna logika wyższego rzędu
(rachunek konstrukcji (CC) + definicje indukcyjne)



- \uparrow polimorfizm
- \nearrow konstruktory typów
- \rightarrow typy zależne

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów zależnych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : \forall x:A.B(x)}$$

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów zależnych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : \forall x:A.B(x)}$$

Skrót: $A \rightarrow B$ to $\forall x:A.B$, gdzie $x \notin FV(B)$

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów zależnych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : \forall x:A.B(x)}$$

Skrót: $A \rightarrow B$ to $\forall x:A.B$, gdzie $x \notin FV(B)$

$\lambda n:\text{nat}.M : \forall n:\text{nat}.\text{vector}(n)$ to w Coqu:

`fun n:nat => M : forall n:nat, vector n`

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów zależnych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : \forall x:A.B(x)}$$

Skrót: $A \rightarrow B$ to $\forall x:A.B$, gdzie $x \notin FV(B)$

$\lambda n:\text{nat}.M : \forall n:\text{nat}.\text{vector}(n)$ to w Coqu:

`fun n:nat => M : forall n:nat, vector n`

reguła aplikacji:

$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash FG : B}$$

reguła abstrakcji dla typów prostych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : A \rightarrow B}$$

reguła abstrakcji dla typów zależnych:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash M : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x:A.M : \forall x:A.B(x)}$$

Skrót: $A \rightarrow B$ to $\forall x:A.B$, gdzie $x \notin FV(B)$

$\lambda n:\text{nat}.M : \forall n:\text{nat}.\text{vector}(n)$ to w Coqu:

`fun n:nat => M : forall n:nat, vector n`

reguła aplikacji:

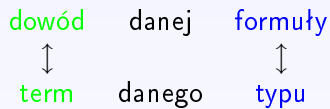
$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash FG : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F : \forall x:A.B(x) \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash FG : B[G/x]}$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

dowód danej formuły

Izomorfizm Curry'ego-Howarda



Izomorfizm Curry'ego-Howarda

dowód	danej	formuły
↕		↕
term	danego	typu

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

dowód	danej	formuły
↕		↕
term	danego	typu

$$\lambda x^{A \rightarrow B \rightarrow C} \lambda y^{A \rightarrow B} \lambda z^A \ xz(yz) : (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Dowodzenie w Coqu

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

dowód	danej	formuły
↕		↕
term	danego	typu

$\lambda x^{A \rightarrow B \rightarrow C} \lambda y^{A \rightarrow B} \lambda z^A \ xz(yz) : (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Pytanie: czy mam poprawny dowód danego lematu odpowiada
pytaniu czy odpowiedni term jest danego typu

Poprawność Coqa: poprawność alorytmu sprawdzania typów

Definicje indukcyjne w Coqu

- proste typy danych
(np. liczby naturalne unarne)

Definicje indukcyjne w Coqu

- proste typy danych
(np. liczby naturalne unarne)
- typy polimorficzne
(np. listy)

Definicje indukcyjne w Coqu

- proste typy danych
(np. liczby naturalne unarne)
- typy polimorficzne
(np. listy)
- typy zależne
(np. wektory danej długości lub drzewa danego rozmiaru)

Definicje indukcyjne w Coqu

- proste typy danych
(np. liczby naturalne unarne)
- typy polimorficzne
(np. listy)
- typy zależne
(np. wektory danej długości lub drzewa danego rozmiaru)
- formuły
(prawie cała logika Coqa)

Definicje indukcyjne w Coqu

- proste typy danych
(np. liczby naturalne unarne)
- typy polimorficzne
(np. listy)
- typy zależne
(np. wektory danej długości lub drzewa danego rozmiaru)
- formuły
(prawie cała logika Coqa)
- predykaty
(np. równość)

```
Inductive bool : Type :=  
  true : bool  
| false : bool.
```

```
Inductive bool : Type :=  
  true : bool  
| false : bool.
```

- Typ indukcyjny:
bool : Type

```
Inductive bool : Type :=  
  true : bool  
| false : bool.
```

- Typ indukcyjny:

```
bool : Type
```

- Konstruktory:

```
true : bool
```

```
false : bool
```

```
Inductive bool : Type :=  
  true : bool  
| false : bool.
```

- Typ indukcyjny:

```
bool : Type
```

- Konstruktory:

```
true : bool  
false : bool
```

- Analiza przypadków:

```
match n with  
| true => ...  
| false => ...  
end
```

```
Inductive sorted : list Z -> Prop :=  
| sorted0 : sorted nil  
| sorted1: forall z:Z, sorted (z :: nil)  
| sorted2: forall (z1 z2 : Z) (l : list Z),  
z1 <= z2 -> sorted (z2 :: l) -> sorted (z1 :: z2 :: l).
```

```
Inductive sorted : list Z -> Prop :=  
| sorted0 : sorted nil  
| sorted1: forall z:Z, sorted (z :: nil)  
| sorted2: forall (z1 z2 : Z) (l : list Z),  
z1 <= z2 -> sorted (z2 :: l) -> sorted (z1 :: z2 :: l).
```

- Rodzina predykatów indukcyjnych:
sorted : list Z -> Prop

```
Inductive sorted : list Z -> Prop :=  
| sorted0 : sorted nil  
| sorted1: forall z:Z, sorted (z :: nil)  
| sorted2: forall (z1 z2 : Z) (l : list Z),  
z1 <= z2 -> sorted (z2 :: l) -> sorted (z1 :: z2 :: l).
```

- Rodzina predykatów indukcyjnych:

```
sorted : list Z -> Prop
```

- Konstruktory:

```
sorted0
```

```
sorted1
```

```
sorted2
```



```
Inductive sorted : list Z -> Prop :=  
| sorted0 : sorted nil  
| sorted1: forall z:Z, sorted (z :: nil)  
| sorted2: forall (z1 z2 : Z) (l : list Z),  
z1 <= z2 -> sorted (z2 :: l) -> sorted (z1 :: z2 :: l).
```

- Rodzina predykatów indukcyjnych:

```
sorted : list Z -> Prop
```

- Konstruktory:

```
sorted0
```

```
sorted1
```

```
sorted2
```

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje
 - argumenty domyślne (rekonstrukcja typów)

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje
 - argumenty domyślne (rekonstrukcja typów)
 - type classes

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje
 - argumenty domyślne (rekonstrukcja typów)
 - type classes
 - koercje

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje
 - argumenty domyślne (rekonstrukcja typów)
 - type classes
 - koercje
 - automatyczne generowanie zasad indukcji

Zasada De Bruijna (“małe” jądro, zewnętrznie sprawdzalne termy)

- jądro / kernel (≈ 20 KLOC), odpowiedzialne za:
 - typowanie w CIC
 - redukcje
 - środowisko (definicje, aksjomaty etc).
 - moduły
- reszta (≈ 230 KLOC), odpowiedzialna za:
 - interfejs użytkownika
 - zarządzanie plikami
 - sekcje
 - zarządzanie nazwami
 - tryb dowodowy (plus taktyki i język taktyk)
 - notacje
 - argumenty domyślne (rekonstrukcja typów)
 - type classes
 - koercje
 - automatyczne generowanie zasad indukcji
 - ...

- 1984 CoC - rachunek konstrukcji - G. Huet, T. Coquand
- 1989 pierwsze wydanie publiczne (wersja 4.10)
- 1991 Coq - rachunek konstrukcji indukcyjnych - C. Paulin (wersja 5.6)
- ⋮
- 2000 wersja 7.0 z nową (bezpieczną) architekturą
- 2003 wersja 7.4 z modułami
- 2004 wersja 8.0 z nową składnią
- 2009 wersja 8.2 z “type classes”
- 2012 wersja 8.4(beta) z eta-redukcją, strukturalną składnią dowodów

- Zasadnicze Twierdzenie Algebry, Nijmegen 2000
- Formalizacja platformy JavaCard, Trusted Logic 2003
September 2007: a big step in program certification in the real world: The Technology and Innovation group at Gemalto has successfully completed a Common Criteria (CC) evaluation on a Java Card based commercial product. This evaluation is the world's first CC certificate of a Java product involving EAL7 components (the official press release).
- Twierdzenie o 4 barwach, Cambridge 2004
- CompCert zweryfikowany kompilator Clight, 2008-teraz

- abstrakcja i aplikacja

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja
- co-rekursja

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja
- co-rekursja
- typy zależne

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja
- co-rekursja
- typy zależne
- moduły i funktory

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja
- co-rekursja
- typy zależne
- moduły i funktory
- type classes

- abstrakcja i aplikacja
- algebraiczne typy danych (liczby naturalne, listy, drzewa...) z pattern-matchingiem
- polimorfizm
- (structuralna) rekursja
- co-rekursja
- typy zależne
- moduły i funktory
- type classes
- ...

- kwantyfikatory ogólne i implikacja (“wbudowane”)

- kwantyfikatory ogólny i implikacja (“wbudowane”)
- spójniki logiczne, fałsz, kwantyfikatory egzystencjalny (zdefiniowane)

- kwantyfikatory ogólny i implikacja (“wbudowane”)
- spójniki logiczne, fałsz, kwantyfikatory egzystencjalny (zdefiniowane)
- logika wyższego rzędu

- kwantyfikatory ogólny i implikacja (“wbudowane”)
- spójniki logiczne, fałsz, kwantyfikatory egzystencjalny (zdefiniowane)
- logika wyższego rzędu
- predykaty indukcyjne

- kwantyfikatory ogólny i implikacja (“wbudowane”)
- spójniki logiczne, fałsz, kwantyfikatory egzystencjalny (zdefiniowane)
- logika wyższego rzędu
- predykaty indukcyjne
- ...

- interaktywny tryb dowodowy (zarządzanie celem dowodowym i założeniami)

- interaktywny tryb dowodowy (zarządzanie celem dowodowym i założeniami)
- wbudowane taktyki (budujące części termów dowodowych): intro, apply, etc.

- interaktywny tryb dowodowy (zarządzanie celem dowodowym i założeniami)
- wbudowane taktyki (budujące części termów dowodowych): intro, apply, etc.
- automatyczne ad-hoc taktyki: auto, intuition, etc.

- interaktywny tryb dowodowy (zarządzanie celem dowodowym i założeniami)
- wbudowane taktyki (budujące części termów dowodowych): intro, apply, etc.
- automatyczne ad-hoc taktyki: auto, intuition, etc.
- procedury decyzyjne: omega, ring, field, tauto, etc.

- interaktywny tryb dowodowy (zarządzanie celem dowodowym i założeniami)
- wbudowane taktyki (budujące części termów dowodowych): `intro`, `apply`, etc.
- automatyczne ad-hoc taktyki: `auto`, `intuition`, etc.
- procedury decyzyjne: `omega`, `ring`, `field`, `tauto`, etc.
- język taktyk (`Ltac mytactic:=...`)

- “wyciągnięcie” programu realizującego dany algorytm z dowodu poprawności algorytmu,

- “wyciągnięcie” programu realizującego dany algorytm z dowodu poprawności algorytmu,
- program wyekstrahowany jest poprawny ze specyfikacją “z definicji”,

- “wyciągnięcie” programu realizującego dany algorytm z dowodu poprawności algorytmu,
- program wyekstrahowany jest poprawny ze specyfikacją “z definicji”,
- ekstrakcja polega na “wycieraniu” części logicznych z termu dowodowego,

- “wyciągnięcie” programu realizującego dany algorytm z dowodu poprawności algorytmu,
- program wyekstrahowany jest poprawny ze specyfikacją “z definicji”,
- ekstrakcja polega na “wycieraniu” części logicznych z termu dowodowego,
- ekstrakcja możliwa dlatego, że mamy do czynienia z logiką intuicjonistyczną, w której prawa takie jak “wyłączonego środka”, “przez sprzeczność” nie są prawdziwe,

Ekstrakcja programów

- “wyciągnięcie” programu realizującego dany algorytm z dowodu poprawności algorytmu,
- program wyekstrahowany jest poprawny ze specyfikacją “z definicji”,
- ekstrakcja polega na “wycieraniu” części logicznych z termu dowodowego,
- ekstrakcja możliwa dlatego, że mamy do czynienia z logiką intuicjonistyczną, w której prawa takie jak “wyłączonego środka”, “przez sprzeczność” nie są prawdziwe,
- języki docelowe: O’Caml, Haskell, Scheme

- dwie możliwości tworzenia poprawnych programów

- dwie możliwości tworzenia poprawnych programów
 - ① najpierw program, potem specyfikacja (łatwe typy + lematy)

- dwie możliwości tworzenia poprawnych programów
 - 1 najpierw program, potem specyfikacja (łatwe typy + lematy)
 - 2 program i specyfikacja “naraz” (typy z własnościami)

- dwie możliwości tworzenia poprawnych programów
 - ① najpierw program, potem specyfikacja (łatwe typy + lematy)
 - ② program i specyfikacja “naraz” (typy z własnościami)
- nowa funkcjonalność Coqα: ten drugi sposób stał się prostszy!

Sekcja Program_Spec_later.

- Implementacja (insertion sort)
- Specyfikacja
- Dowód poprawności
- Ekstrakcja (program w Ocamlu/Haskellu)

Sekcja Program_and_Spec.

- Implementacja i specyfikacja razem (insertion sort)
- Dowód poprawności
- Ekstrakcja (program w Ocamlu/Haskellu)