V Międzynarodowy Wieczorek Popularno-Naukowy

Teoria gier

9 maja 2009

Na naszej uczcie uraczymy się tym razem teorią gier. Na początek powiedzmy czym jest w ogóle teoria gier. Jest to dziedzina matematyki badająca gry. Jednak - nie bada ona jedynie gier typu kółko i krzyżyk, bądź szachy, bada gry w pewnym sensie dowolne. Wiele rzeczy możemy traktować jako grę, weźmy na ten przykład dwie firmy na rynku. Można powiedzieć, że prowadzą one między sobą grę, każda z nich ma pewne strategie marketingowe, każda ustala wysokości cen produktów i inne rzeczy, to są ich strategie. W zależności od tych strategii osiągną one pewne zyski. Można to traktować jako grę tych firm między sobą. Podobnie można traktować nasze posunięcia w życiu jako pewne strategie i nas jako graczy w społeczeństwie w wielkiej grze zwanej życiem. Ale - przejdźmy do rzeczy.

Nagrody Nobla Niestety (dla matematyków) nie ma nagrody Nobla z matematyki. Jednak matematycy dostają nagrody Nobla. Aż pięciokrotnie nagrodę Nobla z ekonomii wręczono za badania z teorii gier! Pierwszą z nich dostał Herbert Simon w 1978 roku, za badania nad ewolucyjna teoria gier, o której jeszcze będziemy mówić. W 1994 dostały 3 osoby za rozwój teorii gier i jej zastosowania w ekonomii, między innymi słynny John Nash (ten sam, o którym jest film Piękny Umysł). Nash jeszcze będąc studentem (w wieku 22 lat) dokonał niesamowitego przełomu w badaniach nad grami, wspomnimy jeszcze co tak naprawdę zrobił. Następnie w latach 1996, 2005 i 2007 nagrodę Nobla wręczano również za badania w tej dziedzinie, co ciekawe w 2007 dostał ją Leonid Hurwicz, ekonomista polskiego pochodzenia (najstarszy noblista, 90 lat).

Należy zadać pytanie - dlaczego ta dziedzina jest aż tak ważna? Rozdano za badania w niej 5 nagród Nobla. Oprócz ekonomii ma ona też szerokie zastosowania w biologii, socjologii, informatyce. Przyjrzyjmy się najpierw następującej historii.

Dylematy więźniów Złapano dwóch groźnych przestępców. Wiadomo, że współpracowali dokonując pewnego karalnego czynu, ale nie bardzo są na to dowody. Wymiar sprawiedliwości stara się wyciągnąć zeznania od więźniów. Każdy z nich ma 2 strategie do wyboru, przyznać się do czynu i zeznawać lub wstrzymać się od zeznań. Jeśli obaj gracze (więźniowie) przyznają się do przestępstwa, to dostaną po 4 lata. Jeśli obaj się nie przyznają, to dostaną po 2 lata (ze względu na brak dostatecznych dowodów). Jeśli jeden z nich (powiedzmy pierwszy) przyzna się, a drugi nie, to pierwszy dostanie 1 rok (za współpracę), a drugi 5 lat, gdyż dowody będą, a kara nie dostanie złagodzona za współpracę.

Opisaną sytuację można przedstawić w postaci następującej tabeli (w każdym polu jest napisana kara dla I-go i II-go więźnia). Stosuję skróty (P - przyznać się, NP - nie przyznać się).

I gracz \ II gracz	P	NP
P	(4,4)	(1,5)
NP	(5,1)	(2,2)

Będziemy nazywać więźniów graczami. Zastanówmy się co powinien zrobić w takiej sytuacji gracz, postawmy się w sytuacji gracza I.

Jeśli gracz II wybierze strategię Przyznawania się, to jeśli my się przyznamy mamy 4 lata, jeśli nie, to 5, czyli w tej sytuacji opłaca się przyznać.

Jeśli gracz II wybierze strategię Nieprzyznawania się, to jeśli my się przyznamy mamy 1 rok, jeśli nie, to 2, czyli w tej sytuacji też się opłaca przyznać.

Czyli ogólnie opłaca się przyznać. Taką samą sytuację ma drugi gracz, więc najprawdopodobniej (jeśli będą sensownie myśleć) obaj się przyznają i dostaną po 4 lata. Zauważmy jednak - gdyby obaj się nie przyznali, to dostaliby obaj tylko po 2 lata!

To jest przykład sytuacji, w której jeśli każdy gracz chce jak najlepiej dla siebie efekt jest kiepski. I to jest przyczyna, dla której teoria gier jest taka ważna. Bardzo wielkim problemem ludzkości jest fakt, że istnieją konflikty interesów i niestety często jest tak, że gdy każdy działa na własną korzyść, to efekt jest opłakany. Badaniem tego rodzaju zjawisk i sposobami radzenia sobie z nimi zajmuje się teoria gier, przyjrzyjmy się jej dokładniej.

Krowy na pastwisku Spójrzmy na inny przykład.

We wsi mieszka 10 gospodarzy. Każdy z nich ma 1 krowę. Posiadają wspólne pastwisko, które nie jest zbyt duże, ale też nie za małe, w sam raz na 10 krów. Jeśli pasie się na nim 10 krów, to każda daje 10 litrów mleka dziennie. Jeśli jednak pasie się więcej, to dają mniej litrów, to znaczy 11 krów - każda po 9 litrów, 12 krów - każda po 8, 13 - każda po 7, ... , 18 - każda po 2, 19 - każda po 1 litrze, 20 - krowy nie dają mleka. Każdy z gospodarzy może sobie dokupić jedną krowę (powiedzmy, że na więcej nie ma miejsca w oborze).

Poniżej tabela wypłat (należy zauważyć, że tę tabelę interpretujemy zupełnie inaczej niż poprzednią tabelę, na marginesie - tabela analogiczna do poprzedniej powinna mieć 10 wymiarów, jako, że jest 10 graczy, każdy z graczy ma po 2 strategie, czyli byłoby $2^{10} = 1024$ pól i w każdym z nich 10 liczb - zyski 10 graczy).

Ilość krów	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Litrów od jednej krowy	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

W pewnym momencie jeden z gospodarzy pomyśli sobie - mam teraz 1 krowę, 10 litrów dziennie. Jeśli dokupię drugą (krowy są tanie), to będę miał 2 razy po 9 litrów na krowę, czyli 18 litrów - opłaca się (dokupi krowę). Następnie drugi pomyśli - mam 9 za jedną krowę, gdy dokupię, to będę miał 2 razy 8, czyli 16 litrów - również ten dokupi. Tak będą myśleć kolejni gospodarze, spójrzmy na sytuację, gdy już 7 będzie miało 2 krowy, a tylko 3 po 1. Jeden z tych trzech pomyśli - mam teraz 1 krowę, co daje 3 litry, jak dokupię drugą, to będę miał 2 razy 2 litry, ponieważ 4 to więcej niż 3, to dokupi krowę. Na tym się proces zatrzyma, bo żadnemu z pozostałych 2 gospodarzy nie opłaca się zamieniać 1 krowy dającej 2 litry na 2 krowy dające 1 litr.

Zauważmy co się stało. Każdy gospodarz chciał dla siebie jak najlepiej. Na początku każdy miał 10 litrów mleka dziennie. Teraz 8 ma po 2 krowy dające 2 litry, czyli 4 litry dziennie, 2 ostatnich ma tylko po 2 litry dziennie. Wszyscy stracili!

Odkrycia Nasha Nash jako pierwszy stworzył sensowną teorię opisującą gry, które nie są tak zwanymi grami o sumie zerowej. Gry o sumie zerowej to gry, w których to co jeden gracz zyskuje, to drugi traci. Na pierwszy rzut oka widać, że nie jest to dobry model dla gier występujących w życiu, na przykład dla dylematu więźnia (obaj stracili).

Nash wprowadził pojęcie równowagi, zwanej później równowagą Nasha. W przykładzie z więźniami równowagą jest sytuacja, gdy obaj gracza ruszają się strategią P. Jeśli gracz pierwszy widzi, że drugi ruszył się strategią P, to jemu nie opłaca się zmieniać swojego P na NP.

Podobnie graczowi drugiemu nie opłaca się zmienić strategii P na inną. Równowagą jest więc taka sytuacja, że każdy z graczy, gdy wie, jak rusza się ten drugi, to nie opłaca mu się zmienić własnej strategii.

W przykładzie z krowami równowagą Nasha jest sytuacja, gdy 8 graczy gra strategią 2 krowy, a 2 strategią 1 krowa. Wówczas żadnemu z graczy, gdy znają strategie innych nie opłaca się zmienić swojej strategii.

Żeby dobrze zrozumieć, co zrobił Nash musimy jeszcze wprowadzić jedno (proste ;)) pojęcie. Wydawałoby się, że gracz więzień ma tylko 2 strategie, przyznać się i nie przyznać się. Tak naprawdę ma ich więcej! Może na przykład zastosować losowanie, to znaczy rzucić monetą, gdy wypadnie orzeł, to się przyznać, gdy reszką, to nie. Może też uznać, że na przykład z prawdopodobieństwem $\frac{3}{8}$ przyznaje się, a $\frac{5}{8}$ nie, albo może stosować dowolne inne losowe strategie.

Bardzo ważne i znane twierdzenie Nasha mówi, że dla każdej gry takiego typu, który rozważamy (czyli gracze podejmują naraz decyzje, mają skończoną ilość podstawowych możliwości) istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha, być może złożona ze strategii losowych. To jest bardzo ważne twierdzenie, mówi ono, że istnieje możliwość, że nastąpi pewna równowaga w grze, a te punkty równowagi są naprawdę istotne, w nich stabilizuje się sytuacja.

Sposoby rozwiązywania problemów Ale czy teoria gier umie nam tylko powiedzieć, że gdy każdy ciągnie w swoją stroną, to jest kiepsko. Czy tylko umie nam przekazać co pociągają za sobą konflikty interesów? Oczywiście nie! Po to rozważa się teorię gier, żeby dawała również recepty na rozwiązywanie problemów.

Rozważmy znany nam już przykład krów. Powiedzmy, że wieś odkupił nowy, chciwy pan. Pan zarządził podatki od krów, każdy gospodarz, który ma przynajmniej 2 krowy (podatek dla burżujów) będzie oddawał 3 litry od krowy. Co wówczas się stanie. Pierwszy gospodarz pomyśli - mam 10 litrów, po kupnie krowy będę miał 2 razy 9 litrów, czyli 18, ale 2 razy 3, czyli 6 będę oddawał panu. Zatem będę miał 12, ok, kupuję. Drugi po podobnej rachubie stwierdzi, że $2 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 10 > 9$ i też kupi krowę. Jednak trzeci stwierdzi - teraz mam 8 litrów. Jak kupię krowę, to będę z dwóch miał 14 litrów, ale 6 oddam panu, czyli wyjdzie na to samo. W tym miejscu zatem znajduje się równowaga Nasha - 2 gospodarzy po 2 krowy, 8 po 1 krowie. Tych 2 gospodarzy ma po 10 litrów, tych 8 po 8 litrów dziennie. Wszyscy mają lepiej niż dawniej, a chciwy pan nieświadomie poprawił sytuację na wsi.

Co się stało? Co tak naprawdę zrobił właściciel? Tak naprawdę zmienił on tak wagi gry, w którą grali gospodarze, że równowaga Nasha przesunęła się w zupełnie inne miejsce - dużo bardziej korzystne dla gospodarzy. Gdyby podatek wynosił 4 litry od krowy dla bogaczy, to nikt nie kupiłby drugiej krowy (ale pan nic by nie zyskał ;)).

Ciekawym pytaniem jest jaki podatek powinien nałożyć pan, żeby zyskać jak najwięcej.

Oczywiście rynek jest tak naprawdę o wiele bardziej skomplikowany. Niemniej jednak nie będzie dużym nadużyciem stwierdzenie, że w makroekonomii zarządzanie finansami państwa polega de facto na takim ustawieniu wag w grze firm, inwestorów i innych podmiotów gospodarczych, by równowaga Nasha ustawiła się w sensownym punkcie.

Zastosowania Widzieliśmy już zastosowania teorii gier w ekonomii. To oczywiście wierzchołek góry lodowej, nie za takie rzeczy przyznaje się nagrody Nobla, ale nasze przykłady ukazują podstawowe mechanizmy jakie działają w teorii gier.

Teorię gier stosuje się również w biologii i socjologii. Nie ma co się dziwić, można traktować populację zwierząt jako grających ze sobą graczy. Socjologia bada zależności w społeczeństwach ludzkich, wiele zjawisk ku zaskoczeniu niektórych może wyjaśnić teoria gier, w końcu nasze posunięcia możemy traktować jako grę. Ewolucję możemy traktować jako grę pomiędzy genami, każdy z nich chce jak najbardziej się rozprzestrzenić. Spójrzmy na jeden przykład.

Skąd się biorą przestępcy Simon dostał w 1978 roku nagrodę Nobla m.in. za badania nad ewolucyjną teorią gier. Częścią teorii gier dotyczącej ewolucji są tak zwane strategie ewolucyjnie stabilne.

Rozważmy populację dajmy na to lampartów. Lamparty czasem znajdują jedzenie i jedzą w spokoju, ale czasem na ten sam łup natknie się inny lampart (wbrew obiegowym opiniom lamparty padliną nie pogardzą). Cóż wtedy może zrobić taki lampart. Rozważmy uproszczony model, w którym istnieją dwa typy lampartów, łagodne i agresywne. Gdy dwa łagodne lamparty spotkają się, to zjedzą po połowie łupu (to już nie wiem, czy się zdarza w rzeczywistości). Gry agresywny spotka łagodnego, to odgoni go i zje cały łup, a łagodny nic (będzie musiał szukać innego jedzenia). Gdy jednak spotkają się dwa agresywne, to będą walczyć na śmierć i życie i w efekcie doznają ciężkich ran. Zyski graczy (lampartów) przedstawia następująca tabela.

Ł - łagodny, A - agresywny, liczby oznaczają procent zjedzonego jedzenia, uznałem, że rany są tak ciężkie, że warte byłyby 2 łupów, czyli 200 procent.

I gracz \ II gracz	Ł	A
Ł	(50,50)	(0,100)
A	(100,0)	(-200,-200)

Dawniej, nim znano dobrze teorię gier ewolucja nie umiała sobie sama poradzić z faktem, że w rzeczywistej populacji istnieją zarówno osobniki agresywne, jak i łagodne. Przecież agresywny zawsze wygrywa z łagodnym, więc łagodne powinny w toku ewolucji wyginąć. Argumentowano, że łagodne muszą istnieć, żeby populacja się nie wybiła, ale wszystko było mętne.

Jednak z pomocą przychodzi nam pojęcie strategii ewolucyjnie stabilnej. Zauważmy, gdyby wszystkie lamparty były łagodne, to gdyby dzieci któregoś zmutowały się i powstałby lampart agresywny, to miałby dużo lepiej niż zwykłe łagodne, wszystkich by odganiał. Czyli intuicyjnie - strategia bycia łagodnym nie jest ewolucyjnie stabilna, bo jakaś losowa mutacja pozwala na osiągnięcie dużo lepszej pozycji.

Gdyby wszystkie lamparty były agresywne, to opłacałoby się być w tej sytuacji lampartem łagodnym. Lepiej być łagodnym, gdy spotykam agresywnego, bo jedynie nic nie zjem, a nie zarobię ran. Czyli strategia bycia agresywnym też nie jest stabilna.

Widać, że stabilna strategia ewolucyjna musi leżeć gdzieś pośrodku. Pewna część populacji musi być agresywna, a pewna część łagodna. Muszą to być takie części, żeby tak samo opłacało się być w tej sytuacji łagodnym, jak i agresywnym.

Możemy nawet obliczyć jak duża to część. Niech p oznacza ułamek lampartów, który jest agresywny. Wówczas $1-p$ będzie lampartów łagodnych. Można sobie wyobrażać, że na przykład $p = 0.3 = 30\%$, a wówczas $1 - p = 0.7 = 70\%$, przy czym okaże się, czy 30% to faktycznie dobra liczba. Jeśli jestem lampartem łagodnym, to jeśli spotkam lamparta łagodnego (z prawdopodobieństwem $1 - p$), to zyskuję 50, jeśli agresywnego (z prawd. p), to 0. Czyli mój zysk średni to

$$(1 - p) \cdot 50 + p \cdot 0 = 50 - 50p.$$

Jeśli jestem agresywny, to spotykając łagodnego (z prawd. $1 - p$) zyskuję 100, a agresywnego (z prawd. p) zyskuję -200. Czyli mój zysk średni to

$$(1 - p) \cdot 100 + p \cdot (-200) = 100 - 100p - 300p = 100 - 300p.$$

Zatem aby tak samo opłacało się być łagodnym, jak i agresywnym, to zyski średnie przy obu strategiach muszą być równe. Musi więc zachodzić równość

$$50 - 50p = 100 - 300p,$$

co daje $250p = 50$, czyli $p = 0.2 = 20\%$.

Wychodzi na to, że strategią ewolucyjnie stabilną jest sytuacja, gdy 20 procent lampartów będzie agresywna.

Możemy tę sytuację przenieść na społeczeństwo ludzkie, przestępców i normalnych ludzi. Widać wówczas dlaczego podniesienie kar, polityka twardej ręki zmniejszają przestępczość w społeczeństwie, choć jest to oczywiście o wiele bardziej skomplikowane. Jak ktoś chce się pobawić, to polecam przyjąć, że lamparty agresywne tracą nie 200, ale 450 i policzyć jaki wówczas będzie procent agresywnych w populacji?

Wszystko przed nami Teoria gier jest dziedziną żywą, co widać po nagrodach Nobla. Trzeba tu jeszcze na przykład uwzględnić ludzkie odczucia, to, że jeśli widzimy, że gracz zazwyczaj jest ugodowy, to pewnie w następnej rozgrywce też taki będzie i wiele innych czynników. Wszystko przed nami - kto wie czyja będzie następna nagroda Nobla z teorii gier? ;)