# Porównanie arytmetyki Heytinga i arytmetyki Peano pierwszego rzędu

Obie arytmetyki definiują liczby naturalne wraz z dodawaniem, mnożeniem i zasadą indukcji, różniąc się jedynie systemem logicznym (dla arytmetyki Heytinga jest to logika intuicjonistyczna, a dla arytmetyki Peano - logika klasyczna).

Celem zadania jest formalizacja obu arytmetyk i udowodnienie kilku związków między nimi.

Dane są symbole funkcyjne:

- O - arności zero,
- S - arności jeden,
- *, $+$ - arności dwa.

oraz jeden dwuargumentowy symbol relacyjny $=$.

Następnie dane są aksjomaty Peano, schemat rekursji i intuicjonistyczne reguły dowodzenia.

Te wszystkie ingrediencje tworzą arytmetykę Heytinga. Aby otrzymać arytmetykę Peano należy dołożyć jeszcze aksjomat wyłączonego środka.

Państwa zadaniem będzie:

1. formalizacja formuł pierwszego rzędu nad podaną sygnaturą, używając indeksów de Bruijna do reprezentowania zmiennych.
2. formalizacja obu arytmetyk, jako system reguł dowodzenia sparametryzowany zbiorem aksjomatów
3. zdefiniowanie transformacji Friedmana $P \mapsto P^A$
4. udowodnienie, że dla dowolnej formuły $A$ zachodzi $\Gamma \vdash_P P$ implikuje $\Gamma^A \vdash_H P^A$.
5. zakładając, że dla dowolnej formuły $A$ i dowolnej formuły $P$ bez kwantyfikatorów zachodzi $\vdash_H P^A \iff P \vee A$, pokazać, że każda formuła $\Sigma^1_0$ (czyli postaci $\exists x.F(x)$, gdzie $F$ jest bez kwantyfikatorów) jest dowodliwa w arytmetyce Heytinga wtedy i tylko wtedy gdy jest dowodliwa w arytmetyce Peano.

Poniżej dołączony jest spis reguł naturalnej dedukcji pierwszego rzędu oraz definicja translacji Friedmana.

### Reguły naturalnej dedukcji pierwszego rzędu

Sekwenty są postaci $\Gamma \vdash A$, gdzie $\Gamma$ to multizbiór formuł, a $A$ to formuła. Oprócz początkowych reguł Assume i Weak mamy wyłącznie reguły wprowadzania i eliminacji dla poszczególnych operatorów. Reguły wprowadzania mówią jak udowodnić formułę o danym operatorze głównym, a reguły eliminacji – jak użyć w dowodzie takiej formuły.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (\textsc{Assume}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (\textsc{Assume})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\textsc{Imp-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\textsc{Imp-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\textsc{And-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\textsc{And-E-L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\textsc{And-E-R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\textsc{Or-I-L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\textsc{Or-I-R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\textsc{Or-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\textsc{False-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \notin \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ (\textsc{Forall-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x \backslash t]}\ (\textsc{Forall-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x \backslash t]}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ (\textsc{Exists-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \notin \Gamma, B}{\Gamma \vdash B}\ (\textsc{Exists-E})$$

### Tłumaczenie Friedmana

Niech $A$ będzie formułą arytmetyki. Przez $\neg^A P$ oznaczamy formułę $P \to A$. Dla każdej formuły arytmetyki $P$ definiujemy tłumaczenie $P^A$ w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcl}
\bot^A & \equiv & \bot \vee A \\
(t_1 = t_2)^A & \equiv & t_1 = t_2 \vee A \\
(P_1 \wedge P_2)^A & \equiv & \neg^A\neg^A(P_1^A) \wedge \neg^A\neg^A(P_2^A) \\
(P_1 \vee P_2)^A & \equiv & \neg^A\neg^A(P_1^A) \vee \neg^A\neg^A(P_2^A) \\
(P_1 \to P_2)^A & \equiv & \neg^A\neg^A(P_1^A) \to \neg^A\neg^A(P_2^A) \\
(\forall x.P)^A & \equiv & \neg^A\neg^A\forall x.(P^A) \\
(\exists x.P)^A & \equiv & \neg^A\neg^A\exists x.(P^A)
\end{array}$$

*Jacek Chrząszcz, 11 kwietnia 2002* *ostatnia zmiana: 18 kwietnia 2002*