Intuicjonistyczny rachunek zdań

Zadanie 1 z laboratorium z Coqa. Termin wykonania: ***28 marca 2002***

Zadanie ma na celu wymodelowanie w Coqu intuicjonistycznego rachunku zdań wraz z semantyką Kripkego i systemem dowodzenia – gentzenowskim rachunkiem sekwentów. Udowodnimy (udowodnicie :-) poprawność systemu formalnego względem tej semantyki oraz napiszemy funkcję tłumaczącą model formuł rachunku zdań na formuły Coqa.

1 Formuły rachunku zdań.

Mając dany zbior zmiennych X, zbiór formuł F definiujemy następująco:

$$F \ ::= \ X \ | \ \bot \ | \ F \vee F \ | \ F \wedge F \ | \ F \to F$$

2 Semantyka Kripkego.

Strukturą Kripkego nazywamy trójkę $(G, \leq, \models)$ spełniającą następujące warunki:

- G jest niepuste
- $\leq \subseteq G \times G$ jest quasi porządkiem na G (czyli relacją zwrotną i przechodnią)
- $\models \subseteq G \times X$ jest zachowywane przez $\leq$, czyli

$$\forall x \in X \ \ \forall g \leq g' \quad g \models x \implies g' \models x$$

W powyższej trójce G zwane jest zbiorem *światów*, relacja $\leq$ to relacja *następstwa światów*, gdzie $g \leq h$ oznacza intuicyjnie, że h jest *możliwą przyszłością* dla g, lub po prostu *następnikiem* g. Warunek trzeci powyższej definicji oznacza, że jeśli zmienna zdaniowa x wystąpi w danym świecie, to wystąpi również we wszystkich jego następnikach.

Określimy teraz relację spełniania, która dla struktury Kripkego $K = (G, \leq, \models)$ mówi, kiedy **w strukturze** K **w stanie** $g \in G$ **spełniona jest formuła** F, co (lekko nadużywając notacji) oznaczać będziemy przez $K, g \models F$ lub po prostu $g \models F$. Relacja ta określona jest przez indukcję po budowie F:

- $F = x \in X$, to $g \models F$ wttw $g \models x$ (tutaj $\models$ oznacza trzeci element z definicji K),
- $F = \bot$, to $g \not\models F$,
- $F = A \vee B$, to $g \models F$ wttw $g \models A$ lub $g \models B$,

- $F = A \wedge B$, to $g \models F$ wttw $g \models A$ i $g \models B$,
- $F = A \to B$, to $g \models F$ wttw gdy dla każdego h t.że $g \leq h$ jeśli $h \models A$ to $h \models B$.

Jeśli mówimy, że **w** K **spełniona jest formuła** F (co zapisujemy $K \models F$), to oznacza to, że jest ona spełniona w każdym świecie K. Zapis $\models F$ oznacza, że F **jest tautologią** intuicjonistycznego rachunku zdań, czyli, że jest prawdziwe w każdej strukturze Kripkego (dla każdego K zachodzi $K \models V$).

3 Intuicjonistyczny rachunek sekwentów Gentzena

Sekwent to para, złożona ze zbioru formuł oraz formuły, zapisywana $\Gamma \vdash F$. Intuicjonistyczny rachunek sekwentów Gentzena zawiera jeden aksjomat oraz dla każdego spójnika logicznego, odpowiadające mu reguły lewe i prawe, mówiące jak taki spójnik uzyskać odpowiednio po lewej i prawej strone $\vdash$.
Uwaga! Notacja Γ, A oznacza tak naprawdę $\Gamma \cup \{A\}$ i nic nie mówi o tym, czy $A \in \Gamma$, czy nie!

Aksjomat $\quad \Gamma, A \vdash A$

Reguły:

$\perp$-lewa $\dfrac{}{\Gamma, \perp \vdash A}$

$\vee$ -lewa $\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$ $\qquad$ $\vee$ -prawa$_1$ $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\qquad$ $\vee$ -prawa$_2$ $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$

$\wedge$ -lewa$_1$ $\dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$ $\qquad$ $\wedge$ -lewa$_2$ $\dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$ $\qquad$ $\wedge$ -prawa $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$

$\to$-lewa $\dfrac{\Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash C}$ $\qquad$ $\to$-prawa $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$

Jeżeli zachodzi $\vdash A$, to mówimy, że A jest twierdzeniem.

4 Polecenia

1. Sformalizować w Coqu typ reprezentujący formuły rachunku zdań.
2. Sformalizować semantykę Kripkego oraz podać kilka przykładów ciekawych formuł oraz ciekawych struktur, w ktorych te formuły są spełnione (i udowodnić to w Coqu).

3. Sformalizować rachunek sekwentów Gentzena, podać wyprowadzenie sekwentu $\vdash ((p \vee (p \to \bot)) \to \bot) \to \bot$[1] oraz kilku innych twierdzeń intuicjonistycznego rachunku zdań.

4. Udowodnić poprawność systemu dowodzenia względem podanej semantyki, tj.

   Dla dowolnej formuły F, jeśli $\vdash F$, to $\models F$

5. Napisać w Coqu funkcję $\Phi : (X \to \texttt{Prop}) \to \texttt{Formula} \to \texttt{Prop}$, tłumaczącą termy typu `Formuła` (z punktu 1), na formuły Coqa. Pierwszym argumentem funkcji Φ jest wartościowanie zmiennych.

   Funkcja Φ ma mieć następujące własności (dowiedzione w Coqu):

   - jeśli formuła jest zmienną $x : X$, to dla dowolnego $v : X \to \texttt{Prop}$ zachodzi $(\Phi\ v\ (\texttt{Var}\ x)) \leftrightarrow (v\ x)$
   - jeśli formuła F jest twierdzeniem intuicjonistycznego rachunku zdań, to dla dowolnego wartościowania v zachodzi $(\Phi\ v\ F)$.
   - jeśli zachodzi $\vdash F \to \bot$ to dla dowolnego wartościowania v zachodzi $\texttt{\~{}}(\Phi\ v\ F)$

Myślę, że rozwiązanie zadania nie powinno sprawić (zbyt dużych) kłopotów. Jeśli znaleźlibyście w powyższej treści jakieś błędy, to bardzo proszę o poinformowanie mnie o tym fakcie.

Życzę powodzenia

Jacek Chrząszcz, 28 lutego 2002 — *ostatnia zmiana: 4 marca 2002*

[1] Uwaga na uwagę!